De Bruijnovi grafi

Lovro Kastelic, Ana Krošl, Ronja Pražnikar
Mentor: Juš Kocutar

Povzetek

Elemente množice velikosti r želimo razporediti v krožno zaporedje, tako da se vsako zaporedje dolžine n kot podzaporedje zaporednih členov pojavi natanko enkrat. S pomočjo De Bruijnovega grafa in z obstojem Eulerjevega obhoda na njem dokažemo, da je to mogoče za vse pare (r, n).

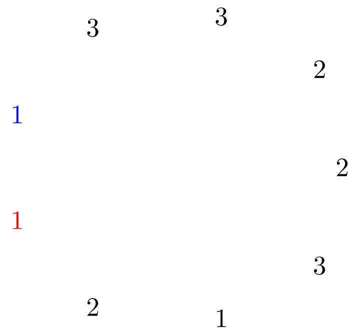
1 Uvod

Zanima nas, ali lahko prvih r naravnih števil razporedimo v krog na poseben način. Za neko naravno število n želimo v krog razporediti r^n členov tako, da se bo vsako zaporedje dolžine n ponovilo natanko enkrat. Odgovor na vprašanje, ali takšna razporeditev obstaja, je za vsaki števili r in n pritrdilen, v projektu želimo potrditi to tezo. Za rešitev problema bomo spoznali teorijo grafov, definirali De Bruijnov graf in problem iskanja ustreznega krožnega zaporedja prevedli na iskanje Eulerjevega obhoda na De Bruijnovem grafu.

2 Predstavitev problema

Imamo množico naravnih števil $A = \{1, 2, 3, \ldots, r\}$ velikosti r in naravno število n. Poiščemo vsa zaporedja dolžine n, ki vsebujejo elemente množice A. Vemo, da je vseh takih zaporedij r^n, saj imamo za vsakega izmed n členov zaporedja r možnosti za izbiro. Cilj je, da elemente množice A krožno razporedimo na takšen način, da dobimo kot podzaporedja zaporednih členov vsa zaporedja dolžine n. To pomeni, da lahko izberemo n zaporednih elementov na krogu in se premikamo za eno mesto v izbrani smeri, na primer v obratni smeri urinega kazalca. Če so elementi pravilno razporejeni, bi morali dobiti vsa zaporedja elementov množice A dolžine n.
Primer ustreznega krožnega zaporedja za števili $r = 3$ in $n = 2$ opazimo na sliki 1. Začnemo na modri 1 in nadaljujemo pot v obratni smeri urinega kazalca. Prvo podzaporedje dolžine 2 je 11, po vrsti nato sledijo 12, 21, 13, 32, 22, 23, 33 in 31. Enostavno preverimo, da so to vsa zaporedja, saj je vseh $3^2 = 9$.

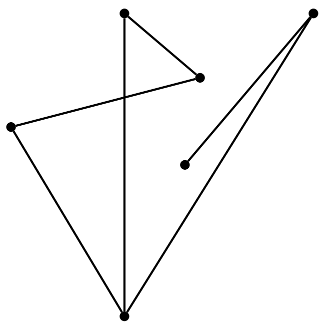
Zanima nas, ali ustrezna krožna razporeditev obstaja za vse pare naravnih števil (r, n), kjer je r velikost množice možnih členov in n dolžina zaporedja. Problem bomo rešili s teorijo grafov, natančneje z De Bruijnovim grafom in z obstojem usmerjenega Eulerjevega obhoda na njem.



Slika 1: Ustrezno krožno zaporedje za števili $r = 3$ in $n = 2$.

3 Osnovne definicije

Graf je matematični prikaz omrežja. Sestavljata ga množica točk oziroma vozlišč V in množica povezav E med njimi.



Slika 2: Primer grafa.

Na sliki 2 je enostaven zgled grafa. Vozlišča so prikazana s točkami, povezave pa z daljicami med njimi.

Definicija 1. *Naj bo V končna množica.* ***Graf*** *G je par $G = (V, E)$, kjer je E družina podmnožic velikosti 2 množice V. Elementom množice V pravimo* ***vozlišča*** *in elementom množice E pravimo* ***povezave****.*

Pogosto pišemo $V = V(G)$ in $E = E(G)$, ko želimo poudariti, da se množici vozlišč in povezav nanašata na specifični graf G. Grafom, definiranim na zgornji način, pravimo tudi *enostavni grafi*, saj ne dopuščajo možnosti večkratnih povezav, zank ali usmerjenih povezav. Vemo zgolj, kdaj je par različnih vozlišč povezan. Pogosto lahko definiramo grafe tudi z neskončno množico vozlišč V in tako dobimo neskočne grafe. Naš projekt obsega končne grafe, zato se z neskončnimi množicami V ne ukvarjamo podrobneje.

Če velja $u, v \in V$ in $\{u, v\} \in E$, potem to zapišemo krajše kot $uv \in E$.

Definicija 2. *Množico vseh vozlišč, ki so povezana s poljubnim vozliščem grafa G, imenujemo* ***soseščina*** *vozlišča v, označimo jo z*

$$N(v) = \{u \in V \mid vu \in E\}.$$

Moč množice $N(v)$ imenujemo ***stopnja*** *vozlišča v in jo označimo z $d(v)$, torej $d(v) = |N(v)|$.*

Dokažimo dva enostavna izreka, da pokažemo zveze med novo definiranimi pojmi.

Izrek 1 (Lema o rokovanju)**.** *Naj bo G graf. Potem velja*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Dokaz. Definirajmo množico M, ki vsebuje urejene pare vozlišč v in povezav e, ki imajo vozlišče v za enega od krajišč, torej

$$M = \{(v, e) \mid v \in V(G) \text{ in } e = vu \text{ za neki } \ u \in V(G)\}.$$

Moč množice M bomo izračunali na dva načina. Najprej se osredotočimo na vozlišča. Zanima nas število povezav okoli vsakega vozlišča, kar je po definiciji enako stopnji vozlišča. Zato seštejemo stopnje vseh vozlišč v grafu. Velja

$$|M| = \sum_{v \in V(G)} d(v).$$

Po drugi strani se lahko osredotočimo na povezave. Za poljubno povezavo e nas zanima število vseh vozlišč v, ki so povezana z njo. Iz definicije povezave vemo, da je povezava povezana z natanko dvema vozliščema. Za povezavo e imamo torej natanko dva para, vsak vsebuje eno od dveh vozlišč, med katerima povezava poteka. Velikost množice M je zato enaka dvakratniku velikosti množice E, torej velja

$$2|E| = |M| = \sum_{v \in V} d(v),$$

kar smo želeli dokazati. □

Izrek 2. *Naj bo G graf, potem ima G sodo mnogo vozlišč lihe stopnje.*

Dokaz. Za dokaz uporabimo izrek 1. Vemo, da velja

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

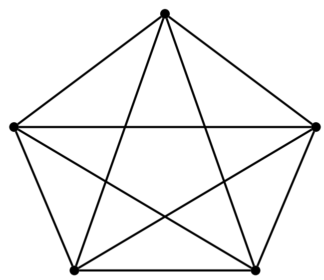
Vsoto stopenj vseh vozlišč lahko razdelimo na vsoto vseh sodih stopenj in vsoto vseh lihih stopenj

$$\sum_{\substack{u \in V(G) \\ d(u) \ sodo}} d(u) + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) \ liho}} d(v) = 2|E(G)|.$$

Desna stran enakosti je soda in vsota vseh sodih stopenj je vedno soda. Zato velja, da je vsota vseh lihih stopenj soda, kar je res natanko tedaj, ko bo vozlišč z liho stopnjo sodo mnogo. □

Poimenujmo grafe, ki imajo vse možne povezave.

Definicija 3. ***Polni graf*** *na n vozliščih, ki ga označimo s K_n, je graf, v katerem je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi vozlišči v grafu.*



Slika 3: Poln graf K_5 na petih vozliščih.

Radi bi imeli definirane pojme za različne vrste zaporedij sosednjih vozlišč v grafu. Razlikovati želimo, na primer med zaporedji, pri katerih dopuščamo ponavljanje vozlišč ali povezav. Radi bi ločili tudi med zaporedji, pri katerih je začetno vozlišče enako končnemu, od zaporedij, pri katerih ni.

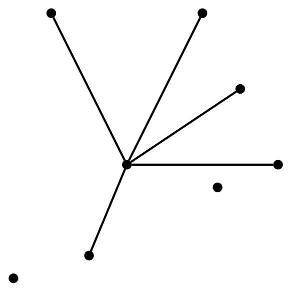
Definicija 4. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Zaporedje vozlišč $v_0, v_1, \ldots, v_n$ je* ***sprehod****, če velja $v_i v_{i+1} \in E$ za vse $0 \leq i \leq n-1$.* ***Obhod*** *je sprehod, za katerega velja $v_0 = v_n$.* ***Pot*** *je sprehod, v katerem se vsako vozlišče pojavi največ enkrat.* ***Cikel*** *je sprehod, za katerega velja $v_0 = v_n$ in v katerem se vsako vozlišče razen v_0 pojavi največ enkrat.*

Povezani grafi so tisti, pri katerih lahko iz vsakega vozlišča s potjo pridemo do poljubnega drugega vozlišča.

Definicija 5. *Graf G je* ***povezan****, če za vsaki vozlišči $v, w \in V(G)$ obstaja pot $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$, da velja $v_0 = v$ in $v_n = w$.*

Tudi če graf ni povezan, lahko govorimo o njegovih povezanih delih.

Definicija 6. ***Povezana komponenta*** *grafa $G = (V, E)$ je podmnožica W množice V, tako da je graf H, ki ima za vozlišča množico W in za množico povezav vse povezave med vozlišči množice W, ki so v grafu G, maksimalno povezan. To pomeni, da je graf H povezan, hkrati pa v grafu G ni nobenih povezav med vozlišči množice W in vozlišči izven množice W.*



Slika 4: Nepovezan graf s tremi povezanimi komponentami.

Primer nepovezanega grafa s tremi povezanimi komponentami je na sliki 4.

Definirajmo pomembno vrsto sprehoda, ki gre skozi vsako povezavo grafa natanko enkrat in se vrne na začetno vozlišče sprehoda.

Definicija 7. ***Eulerjev obhod*** *je obhod, tako da za vsak $v \in V$ velja, da je $v = v_i$ za vsaj en $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, vsaka povezava $e \in E$ je enaka $e = v_i v_{i+1}$ za natanko en $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ in velja $v_0 = v_n$.*

3.1 Usmerjeni grafi

Pri nekaterih omrežjih nas ne zanimajo le povezave ampak tudi njihova smer. Matematično to modeliramo s pojmom usmerjenega grafa. Definicija je podobna kot za enostavne grafe, le da množico E spremenimo v podmnožico kartezičnega produkta $V \times V$ in tako upoštevamo smer povezave.

Definicija 8. *Naj bo V končna množica. Par $G = (V, E)$, kjer je E podmnožica kartezičnega produkta $V \times V$, imenujemo* ***usmerjen graf****.*

Če velja $u, v \in V$ in $(u, v) \in E$, potem to zapišemo kot $uv \in E$. Za pojme sprehodov, poti in ciklov v usmerjenih grafih vzamemo enake definicije kot v primeru enostavnih grafov, le da za povezave uporabljamo pojem usmerjene povezave. V skicah usmerjenih grafov bomo daljico med točkama, ki je prej nakazovala povezavo, nadomestili s puščico, ki nakazuje usmerjeno povezavo. Usmerjena povezava uv bo torej prikazana s puščico, ki kaže od vozlišča u do vozlišča v.

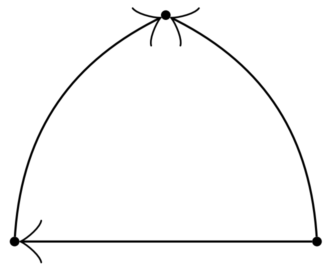
Definicija 9. *Naj bo G usmerjen graf. Potem je G* ***močno povezan****, ko za vsaki vozlišči $v, w \in V$ obstaja pot $v_0, v_1, \ldots, v_n$ z $v_0 = v$ in $w = v_n$.*

Podobno kot v primeru enostavnih grafov želimo tudi v primeru usmerjenih definirati pojma soseščine in stopnje vozlišča. Opazimo, da je v tem primeru pomembna smer povezave, kar moramo upoštevati v definicijah.

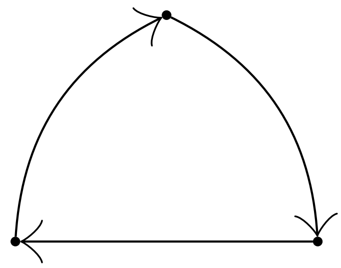
Definicija 10. ***Izhodna soseščina*** *vozlišča v je množica vseh vozlišč u, ki so z vozliščem v povezana s povezavo, usmerjeno od vozlišča v proti vozlišču u, torej $N^+(v) = \{u \in V(G) \mid vu \in E(G)\}$.*

Vhodna soseščina *vozlišča v je množica vseh vozlišč w, ki so z vozliščem v povezana s povezavo, usmerjeno od vozlišča w do proti vozlišču v, torej $N^-(v) = \{w \in V(G) \mid wv \in E(G)\}$.*

Številu $d^+(v) := |N^+(v)|$ pravimo ***izhodna stopnja*** *vozlišča v, številu $d^-(v) := |N^-(v)|$ pa* ***vhodna stopnja****.*



Slika 5: Usmerjeni graf, ki ni močno povezan.



Slika 6: Usmerjeni graf, ki je močno povezan.

Kot v primeru enostavnih grafov imamo tudi v primeru usmerjenih grafov izrek, ki opisuje vsote stopenj in število povezav. Dokaz je analogen dokazu leme o rokovanju in ga lahko bralec poizkusi narediti sam.

Izrek 3. *Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf. Potem velja*

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E(G)|.$$

4 Obstoj Eulerjevega obhoda

Recimo, da nas zanima, ali ima poljuben graf Eulerjev obhod. Z uporabo definicije bi morali preveriti zelo veliko obhodov. Želeli bi poiskati zadostne in potrebne pogoje, ki bi jih preverili bolj enostavno kot z uporabo definicije, in bi natanko določili, kdaj ima poljuben graf Eulerjev obhod. Izkaže se, da obstajata dve lastnosti, ki natanko določata grafe z Eulerjevimi obhodi. To sta povezanost in lastnost, da so stopnje vseh vozlišč v grafu soda števila. V tem poglavju bomo dokazali to ekvivalenco.

4.1 Eulerjev obhod v enostavnih grafih

Izrek o obstoju Eulerjevega obhoda lahko dokažemo na dva načina - z uporabo indukcije ali s protislovjem. Mi ga bomo dokazali s protislovjem, saj lahko slednji dokaz z nekaj spremembami prilagodimo v dokaz obstoja Eulerjevega obhoda na usmerjenih grafih.

Najprej bomo dokazali lemo, ki jo bomo uporabili v nadaljnjem dokazu.

Lema 4. *Če za graf $G = (V, E)$ velja $|V| \geq 3$ in ima vsako vozlišče v grafu stopnjo vsaj 2, potem ima graf G cikel.*

Dokaz. Izberemo vozlišče $v_0 \in V$, v katerem začnemo pot. Po predpostavki ima v_0 stopnjo vsaj 2, zato sta v soseščini $N(v)$ vsaj dve vozlišči. Naj bo najdaljša pot $W = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Takšna pot obstaja, ker je V končna množica. Vozlišče v_k ima stopnjo vsaj 2, zato mora imeti vsaj še enega soseda u poleg v_{k-1}. Če vozlišče u ni na poti W, je pot $W' = \{v_0, v_1, ..., v_k, u\}$ daljša od poti W, kar pomeni, da smo v protislovju. Druga možnost je, da vozlišče u je na poti W. Zato je vozlišče u enako vozlišču v_i za neki i. Graf G ima torej cikel $W'' = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k, v_i\}$. □

Zdaj bomo dokazali glavni izrek iz teorije grafov, ki ga potrebujemo. To je karakterizacija enostavnih grafov z Eulerjevim obhodom.

Izrek 5. *Graf G ima Eulerjev obhod, če in samo če je G povezan in je stopnja $d(v)$ sodo število za vsak $v \in V$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da ima graf $G = (V, E)$ Eulerjev obhod. Najprej dokažimo, da je graf povezan in je stopnja vsakega vozlišča soda. Ker ima graf G Eulerjev obhod, je povezan, saj je Eulerjev obhod po definiciji sprehod, ki vključuje vsa vozlišča.

Naj bo $u \in V$ vozlišče na grafu G. Če je u poljubno vozlišče, ga med Eulerjevim obhodom dosežemo vsaj enkrat in posledično iz njega izstopimo vsaj enkrat. Ker je obhod Eulerjev, vemo, da so v sprehodu vse povezave v grafu. Vemo tudi, da v vsako vozlišče vstopimo tolikokrat, kolikokrat iz njega izstopimo, in skozi nobeno povezavo ne gremo več kot enkrat, torej je število vseh povezav, ki imajo za eno krajišče dano vozlišče, sodo.

($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da je graf $G = (V, E)$ povezan in velja, da je za vsako vozlišče $v \in V$ njegova stopnja soda. Najmanjši graf, ki zadošča tem pogojem je graf na enem vozlišču, za katerega izrek očitno velja.

Recimo, da velja $|V| > 1$. Ker je G povezan in imamo vsaj dve vozlišči, mora imeti vsako vozlišče stopnjo vsaj 1. Ker mora biti vsaka stopnja soda, velja $d(v) \geq 2$ za vsako vozlišče $v \in V$. Noben izmed dveh grafov na dveh vozliščih (dve nepovezani točki in točki, povezani s povezavo) tudi ne more imeti vseh stopenj sodih in biti povezan hkrati, zato lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da velja $|V| \geq 3$. Velja torej, da je G povezan, vsako vozlišče ima sodo stopnjo in $|V| \geq 3$, zato G izpolnjuje oba pogoja leme 4, torej ima cikel. Bolj splošno, vemo, da ima graf G zagotovo obhod brez ponavljanja povezav. Sedaj predpostavimo za protislovje, da izrek ne velja.

Naj bo graf $H = (W, F)$ minimalni protiprimer, torej protiprimer z najmanjšim možnim številom povezav. Velja torej, da je graf H povezan in ima vsako vozlišče sodo stopnjo, vendar H nima Eulerjevega obhoda. Vemo, da je $|W| > 1$, zato zaradi leme 4 vemo, da ima graf H obhod brez ponavljanja povezav.

Izberimo obhod brez ponavljanja povezav z največ uporabljenimi povezavami in naj bo W' množica vseh vozlišč v obhodu ter F' množica vseh povezav v obhodu. Po predpostavki vemo, da graf H nima Eulerjevega obhoda, zato velja $F' \neq F$.

Trdimo tudi, da obstajata vozlišči $u \in W'$ in $v \in W$, da velja $uv \in F - F'$ oziroma, da obstaja vozlišče v najdaljšem obhodu, ki je krajišče povezave, ki je ni v obhodu.

Za dokaz ločimo dva primera. V prvem predpostavimo, da velja $W = W'$, torej, da so v najdaljšem obhodu vsa vozlišča grafa H. V tem primeru trditev drži, saj vemo, da je množica $F - F'$ neprazna, zato obstaja neka povezava $f \in F - F'$, ki ima obe krajišči v množici W' po predpostavki. Zato sta obe krajišči iskani vozlišči in f iskana povezava.

V drugem primeru predpostavimo, da je množica $W - W'$ neprazna. Kot že vemo, najdaljši obhod obstaja, zato obstajata vozlišči $z \in W'$ in $x \in W - W'$. Graf H je povezan, zato obstaja pot $z = z_0, \ldots, z_n = x$ med z in x. Velja $z \in W'$ in $x \notin W'$, zato obstaja najmanjše število i, tako da velja $0 \leq i < n$, za katerega je $z_i \in W$ in $z_{i+1} \notin W'$. Po definiciji opazimo, da velja $z_i z_{i+1} \notin F'$, saj vozlišče z_{i+1} ni v najdaljšem obhodu, zato sta iskani vozlišči z_i in z_{i+1}.

Naj bo torej $e = uv$ povezava, ki ni v najdaljšem sprehodu in $u \in W'$. Definirajmo podgraf $X = (W, F - F')$. Naj bo Y povezana komponenta grafa X, ki vključuje povezavo e. Po definiciji je Y povezan graf. Trdimo še, da ima vsako vozlišče v grafu Y sodo stopnjo. Vemo, da so vse stopnje vozlišč grafa G sode. Po odstranitvi povezav obhoda vsakemu vozlišču na obhodu odstranimo sodo število povezav, pri ostalih se stopnje ne spremenijo. Vidimo, da so zato tudi v podgrafu X in posledično v povezani komponenti Y vse stopnje sode.

Vemo, da ima vsako vozlišče v grafu Y sodo stopnjo in da je graf Y povezan. Hkrati velja tudi, da ima graf Y strogo manj povezav kot graf H. Ker velja, da je graf H protiprimer za izrek z najmanjšim številom povezav, in ker graf Y zadošča pogojem izreka (sode stopnje in povezanost) ter ima manj povezav, ima graf Y Eulerjev obhod. Dodatno vemo, da ima Eulerjev obhod v grafu Y vsaj eno povezavo, ker imamo povezavo e.

Trdimo, da lahko v grafu H najdemo obhod, ki vključuje več povezav kot množica F'. Začnemo s prejšnjim najdaljšim obhodom. Ko pridemo do vozlišča u, naredimo Eulerjev obhod na podgrafu Y, po definiciji tako dodamo vsaj eno povezavo, to je povezava e, ne obiščemo nobene povezave najdaljšega obhoda in se vrnemo na vozlišče u. Končamo tako, da od vozlišča u nadaljujemo najdaljši obhod do konca.

Torej smo prišli v protislovje, saj prvotni obhod ni najdaljši obhod brez ponavljanja povezav, ker smo našli daljšega. Obhod z dodanim Eulerjevim obhod v povezani komponenti Y je namreč daljši. $\square$

4.2 Eulerjev obhod v usmerjenih grafih

Pokazali bomo, kdaj ima usmerjen graf Eulerjev obhod. S protislovjem lahko izrek dokažemo, tako da prilagodimo dokaz neusmerjenega primera. Ponovno bomo dokazali preprosto lemo, ki jo kot orodje uporabimo v glavnem dokazu.

Lema 6. *Če za usmerjen graf $G = (V, E)$ velja $|V| \geq 1$ in $d^+(v) = d^-(v)$ za vsako vozlišče $v \in V$, potem ima graf G cikel.*

Dokaz. Izberemo začetno vozlišče $v_0 \in V$. Naredimo najdaljšo pot $W = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, ki obstaja, ker je množica V končna množica. Vozlišče v_k ima poleg vhodne povezave $v_{k-1}v_k$ vsaj eno izhodno povezavo, saj velja $d^+(v_k) = d^-(v_k)$. Naj bo vozlišče $u \in V$ takšno, da velja $v_k u \in E$. Če vozlišče u ni na poti W, je $W' = \{v_0, \ldots, v_k, u\}$ daljša pot in dobimo protislovje. Druga možnost je, da vozlišče u je na poti, torej je vozlišče u enako vozlišču v_i za neko število i. Usmerjen graf G ima torej cikel $W'' = \{v_k, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k\}$. □

Izrek 7. *Graf G ima usmerjen Eulerjev sprehod, če in samo če je graf G povezan in velja $d^+(v) = d^-(v)$ za vsako vozlišče $v \in V$.*

Obe smeri izreka lahko dokažemo s posnemanjem dokaza izreka 5. Na mestih, kjer je to potrebno, zamenjamo lastnost, da so vse stopnje sode, z lastnostjo, da je vhodna stopnja enaka izhodni za vsako vozlišče, in uporabljamo lemo 6 namesto leme 4.

5 De Bruijnov graf

Preden rešimo zadani problem, si oglejmo posebno vrsto usmerjenega grafa.

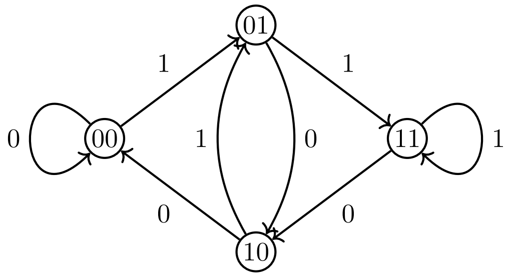
Definicija 11. *Množico naravnih števil do r označimo z $[r] = \{1, 2, ..., r\}$. Množico vseh zaporedij dolžine $n - 1$ s členi v množici $[r]$ označimo z V_r^n, torej*

$$V_r^n = \{(r_1, r_2, ..., r_{n-1}) \mid r_i \in [r] \ \text{ za vsak } 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Sedaj lahko definiramo De Bruijnov graf. To storimo tako, da opredelimo množico vozlišč in množico povezav med njimi.

Definicija 12. ***De Bruijnov graf*** *je usmerjen graf, ki ima za množico vozlišč množico V_r^n. Poljubni vozlišči $u = (u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ in $v = (v_1, v_2, ..., v_{n-1})$ sta povezani natanko tedaj, ko velja $u_i = v_{i-1}$ za vse $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Označimo ga z $G_r^n = (V_r^n, E)$.*

Za ilustracijo De Bruijnovega grafa določimo $r = 2$ in $n = 3$.



Slika 7: De Bruijnov graf G_2^3.

V vsakem vozlišču grafa G_2^3 je neko zaporedje števil 0 in 1 dolžine 2. Med njimi so povezave, ki vodijo od enega vozlišča do drugega. Neformalno si lahko predstavljamo, da gre povezava od izhodnega zaporedja k vhodnemu takrat, ko lahko celotno začetno zaporedje premaknemo za eno mesto v levo, na zadnje mesto pa lahko dodamo katerokoli številko in tako dobimo vhodno zaporedje.

Nad vsako povezavo se nahaja število 0 ali 1. Izberemo tisto, ki je v grafu dodana na konec izhodnega zaporedja, da dobimo vhodno. Na primer, če zaporedje 01 premaknemo za eno mesto v levo, dobimo $1*$, kjer je $*$ lahko katerokoli število. Povezava, nad katero je zapisano število 0, gre do zaporedja 10, in povezava, nad katero je zapisano število 1, gre do zaporedja 11.

Na grafu na sliki 7 lahko opazimo nekaj lastnosti. Ugotovimo, da so vsa vozlišča povezana in da sta vhodna in izhodna stopnja enaki za vsako vozlišče. Izgleda, da De Bruijnov graf G_2^3 izpolnjuje pogoja za obstoj usmerjenega Eulerjevega obhoda, iz izreka 7. Prepričajmo se, da to velja tudi v splošnem.

Izrek 8. *Za vsaki naravni števili r in $n \in \mathbb{N}$ De Bruijnov graf G_r^n vsebuje usmerjen Eulerjev obhod.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z uporabo izreka o Eulerjevem obhodu v usmerjenih grafih. Dokazati moramo, da je De Bruijnov graf vedno močno povezan in da sta vhodna in izhodna stopnja enaki za vsako vozlišče. Najprej bomo dokazali močno povezanost De Bruijnovega grafa. Izberimo poljubni vozlišči u in v iz množice V_r^n, torej $u = (u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ in $v = (v_1, v_2, ..., v_{n-1})$. Za obstoj močne povezanosti moramo med njima poiskati pot. Poglejmo naslednjo pot

$$\begin{aligned} u = w_1 &= (u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \\ w_2 &= (u_2, u_3, ..., u_{n-1}, v_1) \\ w_3 &= (u_3, u_4, ..., u_{n-1}, v_1, v_2) \\ &\vdots \\ w_{n-1} &= (u_{n-1}, v_1, v_2, ..., v_{n-2}) \\ w_n &= (v_1, v_2, ... v_{n-1}) = v, \end{aligned}$$

torej $w_i = (u_i, u_{i+1}, ..., u_{n-1}, v_1, v_2, ..., v_{i-1})$. Opazimo, da sta po definiciji De Bruijnovega grafa w_i in w_{i+1} povezana za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ in, da smo našli iskano pot. Iz konstrukcije namreč lahko zasledimo, da smo iz vozlišča u prišli v vozlišče v. To smo naredili tako, da smo zaporedju u dodajali člene zaporedja v. De Bruijnov graf je torej vedno močno povezan.

Zdaj moramo dokazati še, da sta vhodna in izhodna stopnja enaki za vsako vozlišče De Bruijnovega grafa. Naj bo u poljubno vozlišče, v pa vozlišče, tako da velja $uv \in E$. Iz vozlišča $u = (u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ obstaja izhodna povezava v $v = (u_2, ..., u_{n-1}, *)$, saj po definicji De Bruijnovega grafa vozlišče u enolično določa v z izjemo zadnjega mesta. Znak $*$ predstavlja poljubno število iz množice $[r]$, zato je $d^+(v) = r$.

V obratni smeri, naj bo u poljubno vozlišče, v pa vozlišče, tako da velja $vu \in E$. Vemo, da vhodna povezava do $u = (u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ obstaja za poljuben $v = (*, u_1, u_2, ..., u_{n-2})$. Znak $*$ ponovno predstavlja katerokoli število iz množice $[r]$, zato je $d^-(v) = r$, torej je $d^+(v) = r = d^-(v)$.

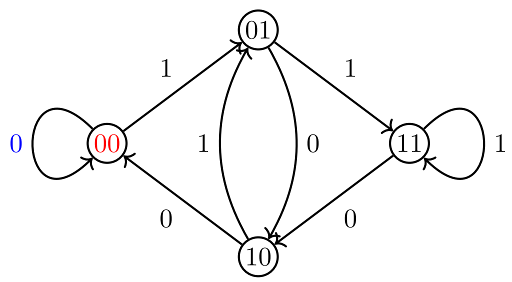
Dokazali smo, da ima vsako vozlišče v G_r^n enako vhodno in izhodno stopnjo ter da je G_r^n močno povezan. Z uporabo izreka 7 o Eulerjevem obhodu v usmerjenih grafih sklepamo, da ima G_r^n vedno Eulerjev obhod. $\square$

6 Rešitev problema

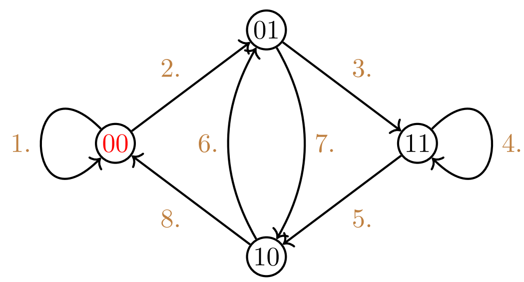
Zdaj, ko imamo vsa orodja, lahko rešimo naš prvotni problem. Za to uporabimo De Bruijnov graf in Eulerjev obhod na njem. Obravnavamo graf G_r^n.

Najprej določimo število vozlišč in povezav De Bruijnovega grafa. Število vseh vozlišč je enako $|V_r^n| = r^{n-1}$, vsako vozlišče ima r izhodnih povezav, zato je vseh povezav $r \cdot r^{n-1} = r^n$.

Na primeru grafa G_2^3 pokažimo, kako z Eulerjevim obhodom na njem skonstruiramo ustrezno krožno zaporedje.

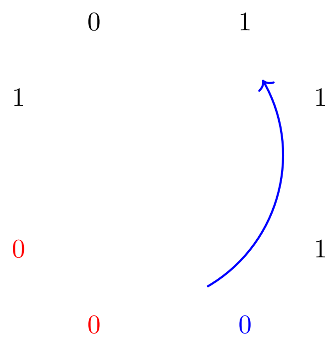


Slika 8: De Bruijnov graf G_2^3.



Slika 9: Eulerjev obhod na G_2^3.

Na sliki 9 opazimo skico Eulerjevega obhoda na G_2^3. Sprehod začnemo na vozlišču 00, označenim z rdečo barvo. Prva povezava v obhodu je zanka, nad katero je rjava 1. Nato sledimo rjavim številkam od ena do osem, ki so po vrsti napisane nad povezavami na sliki 9.



Slika 10: Krožno zaporedje, ki pripada Eulerjevemu obhodu na sliki 9.

Na sliki 10 opazimo krožno zaporedje, ki pripada Eulerjevemu obhodu na sliki 9. Najprej napišemo v obratni smeri urinega kazalca zaporedje, ki pripada začetnemu vozlišču, v našem primeru je to zaporedje 00. Nato začnemo s konstrukcijo krožnega zaporedja. **Nadaljujemo ga tako, da v obratni smeri urinega kazalca zaporedoma dodajamo števila nad povezavami, prepotovanimi v Eulerjevemu sprehodu.** Prvo število, ki ga dodamo na sliki 10, je torej modra 0, tako kot začetna povezava v Eulerjevem sprehodu na sliki 8. Nadaljujemo ga z 1 nad povezavo od 00 do 01 in tako dalje. Postopek prekinemo dva koraka pred koncem, ko bi morali dodati dve 0, ki smo jih dodali v prvem koraku zaradi začetnega vozlišča. Skupno je tako res $2^3 = 8$ členov krožnega zaporedja, en člen za vsako povezavo.

Poglejmo, ali je nastalo krožno zaporedje ustrezno. Preveriti moramo, da se v krogu vsako zaporedje dolžine 3 pojavi natanko enkrat. Začnemo v poljubnem členu in v obratni smeri urinega kazalca preverimo podzaporedja dolžine 3. Od začetnega 000 dobimo podzaporedja 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010 in 100, ki so res vsa možna.

Enak postopek kot za graf G_2^3 velja tudi za splošni graf G_r^n. Začne se tako, da izberemo poljubno vozlišče, kjer začnemo Eulerjev sprehod in v obratni smeri urinega kazalca zapišemo zaporedje dolžine $n-1$, ki ga začetno vozlišče predstavlja. Nato opravimo Eulerjev sprehod in zaporedoma v obratni smeri urinega kazalca dodajamo števila nad prepotovanimi povezavami v Eulerjevem sprehodu. Postopek zaključimo $n-1$ povezav pred koncem Eulerjevega sprehoda, ko bi morali dodati še eno kopijo začetnega zaporedja, ki smo ga dodali v začetnem koraku.

Utemeljiti moramo, da bo tako sestavljeno krožno zaporedje vedno ustrezno. Po konstrukciji bo krožno zaporedje vedno imelo

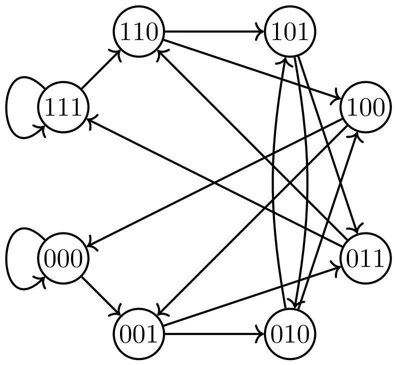
$$(n-1) + (r^n - (n-1)) = r^n$$

členov. To velja, ker najprej dodamo $n-1$ členov prvega vozlišča in potem en člen za vsako izmed r^n povezav ter se ustavimo $n-1$ povezav pred koncem Eulerjevega sprehoda, ko krožno zaporedje zlepimo skupaj. Po konstrukciji je vseh členov krožnega zaporedja r^n, zato je vseh zaporedji dolžine n, ki se pojavijo v obratni smeri urinega kazalca, tudi r^n, saj je vsak člen začetek enega. Vemo torej, da je edini možni problem, da bi se katero od zaporedji dolžine n pojavilo večkrat (in se posledično katero sploh ne bi), saj je dobljeno krožno zaporedje primerne dolžine.

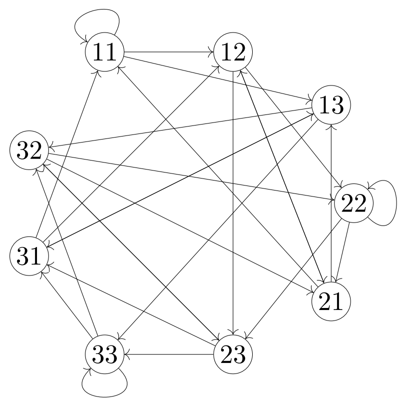
Preostane nam še, da pokažemo, da se vsako zaporedje pojavi. Najprej se osredotočimo na konkretni primer zgoraj. Zaporedje 000 bomo v krožno zaporedje zapisali natanko tedaj, ko bomo v Eulerjevem sprehodu od vozlišča 00 šli po povezavi z oznako 0. Podobno bomo zaporedje 101 v krožno zaporedje zapisali takrat, ko bomo od vozlišča 10 šli po povezavi z oznako 1.

Opažen vzorec ni naključen, zaradi naše konstrukcije to velja v splošnem. Pomembno je, da zaradi konstrukcije, prvo zaporedje dolžine n zapišemo tako, da od vozlišča, ki predstavlja začetnih $n-1$ členov začetnega zaporedja, gremo po povezavi, označeni z zadnjim členom zaporedja dolžine n. Na takšen način začnemo verigo in pozvročimo, da se vsako zaporedje dolžine n pojavi na enak način. Poljubno zapredje dolžine n, recimo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se v krožnem zaporedju pojavi, ko gremo od vozlišča $(a_1, \ldots, a_{n-1})$, do naslednjega vozlišča po povezavi z oznako a_n. Ključna lastnost obhoda je, da je Eulerjev, torej gremo skozi vsako možno povezavo natanko enkrat in zato res vsako zaporedje dolžine n dobimo na en način.

Na slikah 11 in 12 lahko vidimo primera bolj zapletenih De Bruijnovih grafov G_2^4 in G_3^3.



Slika 11: De Bruijnov graf G_2^4.



Slika 12: De Bruijnov graf G_3^3.

7 Zaključek

Odgovorili smo na začetno vprašanje in dokazali, da lahko prvih r naravnih števil vedno razporedimo v krožno zaporedje, tako da se vsako izmed r^n zaporedij dolžine n pojavi natanko enkrat. Najprej smo spoznali osnovne pojme teorije grafov in dokazali lemo o rokovanju. Nato smo utemljili, pod katerimi pogoji ima enostaven graf Eulerjev obhod in dokaz prilagodili za usmerjene grafe. Definirali smo De Bruijnov graf in dokazali, da ima vedno Eulerjev obhod. Na koncu smo utemeljili, kako iz Eulerjevega obhoda na njem pridemo do iskanega krožnega zaporedja.

Literatura

[1] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, 2001.