# Končne podgrupe $SO_3$

Neca Camlek, Lenart Frankovič, Tina Tiara Opalič
Mentor: Matija Likar

**Povzetek**

V članku klasificiramo končne podgrupe $SO_3$ in ponazorimo ujemanje med njimi in grupami rotacijskih simetrij platonskih teles. Definiramo grupe in dokažemo Lagrangeev izrek. Nato še definiramo delovanje grupe in dokažemo izrek o orbitah in stabilizatorjih.

## 1 Grupe

**Definicija 1.** Grupa $(G, \cdot)$ *je par množice* $G$ *in binarne operacije* $\cdot$, *ki vsakemu elementu* $a, b \in G$ *pripiše natanko en element v* $G$, *ki ga označimo z* $a \cdot b$.

*Za grupe veljajo sledeči aksiomi:*

- *operacija grupe je asociativna, torej za vsake tri elemente* $a, b, c \in G$ *velja* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- *grupa ima enoto, torej tak* $e \in G$, *da za vsak* $a \in G$ *velja* $a \cdot e = e \cdot a = a$,
- *vsak element grupe ima svoj inverz, torej za vsak* $a \in G$ *obstaja tak* $a^{-1} \in G$, *tako da* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Če za vsaka $a, b \in G$ velja $a \cdot b = b \cdot a$, rečemo, da je grupa Abelova.

**Definicija 2.** *Moč grupe* $G$ *je število elementov v njeni množici. Označimo jo z* $|G|$.

Na primeru si poglejmo, ali je množica celih števil $\mathbb{Z}$ grupa za seštevanje. Asociativnost očitno drži, prav tako ima $\mathbb{Z}$ enoto (to je število $0$). Obratni element za poljubno celo pa je njegovo nasprotno število $-a$. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je torej grupa za seštevanje.

Dokažimo še dve temeljni lastnosti grup.

**Trditev 1.** *V grupi obstaja natanko ena enota.*

*Dokaz.* Predpostavimo, da obstajata vsaj dve različni enoti, $e_1$ in $e_2$. Po definiciji sledi $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$. Očitno velja enakost $e_1 = e_2$, torej je enota v dani grupi natanko ena. □

**Trditev 2.** *Vsak element grupe ima natanko en inverz.*

*Dokaz.* Predpostavimo, da imamo dva različna inverza, ${a_1}^{-1}$ in ${a_2}^{-1}$. Sledi

$${a_1}^{-1} = {a_1}^{-1}a{a_2}^{-1} = {a_2}^{-1},$$

torej morata inverza biti ista, kar je protislovje. Torej za vsak element obstaja natanko en inverz. $\square$

**Definicija 3.** *Naj bo $H$ podmnožica elementov grupe $(G, \cdot)$. Potem je $(H, \cdot)$ podgrupa $(G, \cdot)$, če:*

- *podmnožica $H$ vsebuje enoto grupe $G$,*
- *je za vsaka $a, b \in H$ tudi $a \cdot b \in H$,*
- *za vsak $a \in H$ je $a^{-1} \in H$.*

Za primer vzemimo grupo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, kjer operacija $\times$ označuje množenje, in podmnožico njenih elementov $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Pokazati želimo, da je $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ podgrupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$. Enota grupe (število 1) je res vsebovana v neničelnih racionalnih številih. Prav tako je produkt dveh poljubnih neničelnih racionalnih števil neničelno racionalno število. Nazadnje, inverz neničelnega naravnega števila $p/q$ je njegova obratna vrednost $q/p$. Dokazali smo, da je $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ podgrupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$.

**Definicija 4.** *Naj bo $H$ podgrupa grupe $G$ in $a$ poljuben element $G$. Množico $aH = \{ax | x \in H\}$ imenujemo* levi odsek *grupe $G$ po podgrupi $H$.*

**Lema 1.** *Leva odseka $aH$ in $bH$ sta bodisi enaka bodisi nimata skupnega elementa.*

*Dokaz.* Denimo, da imata $aH$ in $bH$ skupen element $ah_1 = bh_2$. Sledi, da je $a(h_1{h_2}^{-1}) = b$. Vidimo, da je $h_3 = h_1{h_2}^{-1}$ element podgrupe $H$, torej je $b \in aH$. Naj bo $b_x$ element $|bH|$, kjer je $x$ element množice $H$. To lahko zapišemo kot $b_x = (ah_3)x = a(h_3x)$, kar je element podgrupe $H$. Torej je $bH$ podmnožica $aH$. Simetrično lahko dokažemo tudi $aH \subseteq bH$. Iz tega sledi $aH = bH$, torej sta odseka enaka. $\square$

**Definicija 5.** *Družina množic $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$ je* razbitje *ali* particija *množice $B$, če so množice v družini neprazne, paroma disjunktne in če $A_1 \cup A_2 \cup \dots = B$.*

Vidimo, da tvorijo levi odseki $G$ po $H$ particijo grupe $G$, saj so paroma disjuntni in ker je vsak $a \in G$ vsebovan v levi particiji $aH$. Množico vseh levih odsekov grupe $G$ po podgrupi $H$ imenujemo kvocientna množica in jo označimo z $G/H$. Moč kvocientne grupe imenujemo *indeks* podgrupe $H$ v $G$ in ga zapišemo kot $[G : H]$.

**Lema 2.** *Vsi levi odseki grupe $G$ po podgrupi $H$ imajo isto moč.*

*Dokaz.* Tudi podgrupa $H$ je levi odsek, saj lahko vzamemo $a = e$. Sedaj moramo dokazati, da za poljuben $a \in G$ velja $|aH| = |H|$. Spomnimo se, da $aH$ dobimo tako, da vsak element iz $H$ na levi pomnožimo z $a$. Vsi elementi so različni, ker $ah_1 = ah_2$ implicira $h_1 = h_2$. $\square$

Ker levi odseki tvorijo razbitje grupe, je pri končnih grupah vsota moči levih odsekov enaka moči grupe.

$$\begin{aligned} |H| + |a_2H| + |a_3H| + \ldots + |a_rH| &= |G| \\ r \cdot |H| &= |G| \end{aligned}$$

Iz slednje enačbe je razviden naslednji izrek.

**Izrek 1** (Lagrangeev izrek)**.** *Moč končne grupe $G$ je deljiva z močjo njene poljubne podgrupe $H$, torej velja $|G| = |H|[G : H]$.*

Sicer splošno uporaben izrek nam bo prišel prav šele kasneje ob dokazovanju izreka o orbitah in stabilizatorjih.

## 2 Ciklična in diedrska grupa

V nadaljevanju bomo spoznali dva pogosta tipa grup, to sta ciklična in diedrska grupa, ki ju bomo definirali preko množice elementov, ki ju generirajo.

**Definicija 6.** *Naj bo $X$ neprazna podmnožica elementov grupe $G$. Množico vseh elementov v $G$, ki jih lahko zapišemo kot $y_1 y_2 y_3 \dots y_k$, kjer za vsak člen velja $y_i \in X$ ali $y_i^{-1} \in X$, označimo z $\langle X \rangle$. Poljubna neprazna množica $X$* generira *podgrupo $G$. Elementom množice $X$ pravimo* generatorji.

Kot primer, grupo pozitivnih racionalnih števil za množenje generira njena podmnožica naravnih števil. Podobno lahko grupo celih števil za seštevanje generira podmnožica $\{1\}$.

**Definicija 7.** *Grupi, ki jo generira en sam element, pravimo* ciklična grupa. *Označimo jo z*

$$C_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

**Definicija 8.** Simetrija *je preslikava, ki preslika nek matematični objekt v samega vase.*

**Definicija 9.** *Grupi simetrij pravilnega $n$-kotnika pravimo* diedrska grupa. *Označimo jo z*

$$D_{2n} = \langle \{r, z\} \rangle = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, z, rz, r^2 z, \dots, r^{n-1} z\},$$

*kjer $r$ ustreza rotaciji za kot $\frac{2\pi}{n}$ v pozitivni smeri in $z$ ustreza zrcaljenju preko izbrane simetrale $n$-kotnika. Enota $1$ je v tem primeru simetrija, ki lik pusti pri miru.*

Za diedrsko grupo veljajo še naslednje relacije:

$$r^n = 1, \; z^2 = 1, \; r^{-1} z = zr.$$

**Definicija 10.** *Naj bo $a \in G$. Najmanjšemu naravnemu številu $s$, da je $a^s = 1$, pravimo* red *elementa $a$. Pravimo, da ima $a$ v tem primeru* končen red. *V nasprotnem primeru, če je $a^s \neq 1$ za vsak $s \in \mathbb{N}$, pa rečemo, da ima $a$* neskončen red.

Da ponazorimo, v grupi $C_4 = \langle \{a\} \rangle$ je red elementa $a$ enak 4, red elementa $a^2$ pa je enak 2. Podobno je v grupi $D_{12} = \langle \{r, z\} \rangle$ red elementov $r^3 z$ ter $r^5 z$ enak 2, red elementa $r$ pa je enak 6.

## 3 Delovanje grup

V sklepnem delu prejšnega poglavja smo spoznali diedrsko grupo v kontekstu simetrij pravilnega $n$-kotnika. Tako smo implicitno spoznali delovanje grupe na množici točk $n$-kotnika. V slednjem delu članka bomo spoznali še grupe, ki delujejo na platonska telesa. Za začetek pa, seveda, utemeljimo delovanje grup.

**Definicija 11.** Delovanje *grupe $G$ na množici $X$ je preslikava $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, za katero velja:*

- $1 \cdot x = x$,
- $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$.

Za prej opisano delovanje grupe $D_{2n}$ na pravilnem $n$-kotniku lahko bralec preveri, da zgornji lastnosti res veljata. V nadaljevanju nam bodo prišli prav tudi naslednja definicija in lemi.

**Definicija 12.** *Naj bo $G$ grupa, ki deluje na poljubno množico $X$. Potem pravimo množici $O_x = G \cdot x = \{g \cdot x | \; g \in G\}$* orbita elementa $x$, *množici $G_x = \{a \in G | \; a \cdot x = x\}$ pa* stabilizator elementa $x$.

**Lema 3.** *Stabilizator $G_x$ je podgrupa $G$ za poljuben $x \in X$.*

*Dokaz.* Preveriti moramo, da stabilizator vsebuje enoto, je zaprt za grupno operacijo ter vsebuje inverze vseh svojih elementov. Vemo, da velja

$$1 \cdot x = x,$$

torej je $1 \in G_x$. Pokažimo, da je $G_x$ zaprta za operacijo. Naj bosta $a, b \in G_x$, sledi

$$(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) = a \cdot x = x,$$

torej je $ab \in G_x$. Prav tako $G_x$ vsebuje inverze svojih elementov, saj za vsak $a \in G_x$ velja

$$a^{-1} \cdot x = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1}a) \cdot x = 1 \cdot x = x,$$

torej je tudi $a^{-1} \in G_x$. S tem smo dokazali, da je $G_x$ podgrupa $G$.

**Lema 4.** *Naj grupa $G$ deluje na množici $X$. Potem tvorijo orbite elementov razbitje množice*

$$X = O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_k.$$

Za dokaz te leme si bomo pomagali z ekvivalenčnimi relacijami.

□

**Definicija 13.** *Relacija $\sim$ na množici $A$ je ekvivalenčna, če za poljubne $a, b, c \in A$ velja:*

- *refleksivnost: $a \sim a$,*
- *simetričnost: če $a \sim b$ potem $b \sim a$,*
- *tranzitivnost: če $a \sim b$ in $b \sim c$, potem je $a \sim c$.*

**Izrek 2.** *Dana ekvivalenčna relacija v množici porodi particijo, kjer sta dva elementa v isti množici razbitja natanko tedaj, ko med njima velja ekvivalenčna relacija.*

*Dokaz izreka 4.* Želimo, da sta dva elementa množice $X$ v isti množici razbitja, če je eden izmed elementov v orbiti drugega. Definiramo torej relacijo $s \sim s' \iff \exists g \in G : s' = g \cdot s$. Potrebno je dokazati, da je relacija ekvivalenčna. Refleksivnost velja, ker je $s = id \cdot s$ za vsak $s \in S$. Prav tako velja, da $s' = g \cdot s$ implicira $g^{-1} \cdot s' = s$, torej je relacija simetrična. Dokažimo še tranzitivnost. Za elemente $a, b, c \in X$ predpostavimo $a \sim b$ in $b \sim c$, to pomeni, da velja $b = g_1 \cdot a$ in $c = g_2 \cdot b$. Prvo enačbo vstavimo v drugo in dobimo $c = g_2 \cdot (g_1 \cdot a)$, iz česar sledi $c = (g_2 \cdot g_1) \cdot a$, torej je tudi $a \sim c$, zato je relacija tranzitivna in posledično ekvivalenčna. Po izreku 2 torej orbite elementov množice $X$ tvorijo razbitje množice $X$. □

**Izrek 3** (Izrek o orbiti in stabilizatorju)**.** *Naj bo $X$ končna množica, na kateri deluje končna grupa $G$. Naj bosta $G_x$ in $O_x$ stabilizator ter orbita nekega elementa $x \in X$. Potem velja*

$$|G| = |G_x| \cdot |O_x|.$$

Bralec bo pri zgornji enačbi opazil podobnost z Lagrangeevim izrekom 1. Res, ker vemo, da je $G_x$ podgrupa $G$, je dovolj dokazati, da je indeks podgrupe $G_x$ v grupi $G$ enak $|O_x|$. Preden se lotimo dokaza izreka, si poglejmo še definicijo in lemo, s katerima si bomo pomagali.

**Definicija 14.** *Naj bo $f$ preslikava iz množice $A$ v množico $B$. Preslikava $f$ je* injektivna, *če $f(a_1) = f(a_2)$ implicira $a_1 = a_2$, za vsaka $a_1, a_2 \in A$. Preslikava $f$ je* surjektivna, *če za vsak $b \in B$ obstaja tak $a \in A$, da je $f(a) = b$. Preslikavi, ki je hkrati injektivna in surjektivna, pravimo* bijekcija.

Če obstaja bijekcija iz ene končne množice v drugo, potem imata množici enako moč.

**Lema 5.** *Naj grupa $G$ deluje na množici $X$. Potem za poljuben element $x \in X$ obstaja bijekcija*

$$\begin{aligned} \varepsilon : G_x &\to O_x, \\ aG_x &\longmapsto a \cdot x. \end{aligned}$$

Zgoraj smo z $aG_x$ označili levi odsek grupe $G$ po podgrupi $G_x$.

*Dokaz.* Najprej je treba pokazati, da je preslikava $\epsilon$ dobro definirana. Želimo pokazati, da je vrednost funkcije neodvisna od izbire predstavnika levega odseka, z drugimi besedami $aG_x = bG_x \Rightarrow a \cdot s = b \cdot s$.

Vzemimo torej, isti levi odsek, ki ga zapišemo z dvema predstavnikoma $a, b \in G$. Obe strani enačbe $aG_x = bG_x$ pomnožimo na levi z $a^{-1}$ in dobimo $G_x = a^{-1}bG_x$. Ker je $G_x$ podgrupa in je torej zaprta za operacijo grupe, mora veljati $a^{-1}b \in G_x$, kar pomeni, da je element $a^{-1}b$ v stabilizatorju elementa $x$, oziroma $(a^{-1}b) \cdot s = s$. Končamo s tem, da pomnožimo obe strani enačbe na levi z $a$ in dobimo $b \cdot s = a \cdot s$, kot smo želeli.

Iz tega sledi, da je preslikava $\varepsilon$ dobro definirana. Pokazati moramo še bijektivnost. Najprej dokažemo injektivnost, tako da ponovimo dokaz dobre definiranosti v obratno smer. Surjektivnost pa sledi iz dejstva, da za vsak element orbite $g \cdot x$ obstaja levi odsek $gG_x$, da velja $\varepsilon(gG_x) = g \cdot x$. Iz tega sledi, da je $\varepsilon$ bijektivna preslikava. □

*Dokaz izreka 3.* Izberemo neki $x \in X$. Naj bo $G_x$ stabilizator elementa $x$. Po lemi 3 je $G_x$ podgrupa $G$. Po Lagrangeevem izreku 1 sledi

$$|G| = |G_x| \cdot [G : G_x].$$

Namesto indeksa podgrupe $G_x$ v $G$ lahko po definiciji pišemo moč kvocientne grupe

$$|G| = |G_x| \cdot [G/G_x].$$

Po lemi 5 obstaja bijekcija med $G/G_x$ in $O_x$, torej imata ti dve množici isto moč $|G| = |G_x| \cdot |O_x|$, s čimer smo dokazali izrek o orbiti in stabilizatorju. □

# 4 Končne podgrupe $SO_3$

Izkaže se, da sta Lagrangeev izrek 1 ter izrek 3 o orbiti in stabilizatorju splošno uporabna na področju klasifikacije grup. V sklepnem delu svojega članka si bomo pogledali klasifikacijo podgrup $SO_3$ in njihovo ujemanje z grupami simetrij znanih likov in teles.

**Definicija 15.** *Grupa $SO_3$ je* grupa vseh rotacij *okoli izhodišča v tridimenzionalnem Evklidskem prostoru* ($\mathbb{R}^3$). *Operacija te grupe je kompozitum.*

Za namene klasifikacije nam bo prav prišel naslednji izrek, ki ga navedemo brez dokaza, saj bi ta presegal obseg našega članka.

**Izrek 4.** *Vsak element $SO_3$ razen enote je rotacija okoli neke premice skozi izhodišče.*

Vidimo, da poljuben od enote različen element ohranja vse točke vzdolž takšne premice. Za namene preprostosti bomo opazovali zgolj tisti dve točki na premici, ki ležita na enotski sferi.

**Definicija 16.** *Naj bo $G$ končna podgrupa grupe $SO_3$.* Pol *grupe $G$ je točka na enotski sferi, ki jo neki od enote različen element $g \in G$ ohranja. Množico vseh polov podgrupe $G$ označimo s $\mathcal{P}$.*

Pri klasifikaciji si bomo natančneje ogledali delovanje poljubne končne podgrupe $G$ na množico njenih polov $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$. Pred tem si poglejmo še eno ključno lastnost.

**Lema 6.** *Množica $\mathcal{P}$ je unija nekaterih orbit, ki nastanejo ob delovanju grupe $G$ na* $\mathbb{R}^3$.

*Dokaz.* Želimo dokazati, da je za poljuben $p \in \mathcal{P}$ njegova orbita $O_p$ podmnožica $\mathcal{P}$. Iz definicije sledi, da obstaja od enote različen element $g \in G$, da velja $g \cdot p = p$. Pokažimo, da za poljuben element $h \in G$ velja, da je $h \cdot p$ element množice $\mathcal{P}$.

Naj bo $q = h \cdot p$. Da bo $q \in \mathcal{P}$, mora obstajati od enote različen element $G$, ki ohranja $q$. Opazimo, da element $hgh^{-1}$ zadošča našemu pogoju

$$\begin{aligned} hgh^{-1} \cdot q &= hgh^{-1} \cdot (h \cdot p) \\ &= hg(h^{-1}h) \cdot p \\ &= hg \cdot p \\ &= h \cdot (g \cdot p) \\ &= h \cdot p \\ &= q. \end{aligned}$$

Sledi, da je $q$ prav tako element $\mathcal{P}$. □

**Izrek 5** (Klasifikacija končnih podgrup $SO_3$)**.** *Vsaka končna podgrupa $SO_3$ ima eno izmed naslednjih oblik:*

- *$C_n$: grupa rotacij za večkratnik kota $\frac{2\pi}{n}$ okoli neke premice,*
- *$D_{2n}$: grupa rotacijskih simetrij pravilnega n-kotnika,*
- *$T$: tetraedrska grupa (12 rotacijskih simetrij tetraedra),*
- *$O$: oktaedrska grupa (24 rotacijskih simetrij oktaedra ali kocke),*
- *$I$: ikozaedrska grupa (60 rotacijskih simetrij ikozaedra ali dodekaedra).*

*Dokaz.* Naj bo $G$ končna podgrupa $SO_3$ in $p \in \mathcal{P}$. Označimo $|G_p| = r_p$, $|O_p| = n_p$ in $|G| = N$. Pomagali si bomo še z naslednjima dejstvoma:

- Velja, da je $r_p > 1$ za poljuben $p \in \mathcal{P}$. Grupa stabilizatorjev mora namreč vsebovati identiteto in po definiciji pola vsaj še en drug element $G$. Omenimo še, da za nek pol $p \in \mathcal{P}$ obstaja $r_p - 1$ netrivialnih elementov grupe $G$, ki pol $p$ ohranjajo.
- Vsak element $G$, ki ni enota, ima 2 pola. Po izreku 4 ohranja vsak netrivialen element grupe $G$ natanko vse točke določene premice skozi izhodišče. Pola, ki ustrezata temu elementu, sta torej presečišči premice z enotsko sfero.

Želimo prešteti vse pare $(p, q)$, kjer sta $p \in \mathcal{P}$, $q \in G \setminus \{1\}$ in $q \cdot p = p$. Preštejemo jih na dva načina, in sicer po polih ter po elementih grupe. Iz prej navedenih lastnosti velja

$$2(N-1) = \sum_{p \in \mathcal{P}} (r_p - 1).$$

Po lemi 6 lahko $\mathcal{P}$ zapišemo kot

$$\mathcal{P} = O_1 \cup O_2 \cup O_3 \cup \cdots \cup O_k.$$

Ker imajo poli znotraj iste orbite isti $n_p$ in ker po izreku 3 velja $r_p n_p = N$, imajo poli znotraj iste orbite isto moč stabilizatorja $r_p$. Tako lahko vsoto po polih izrazimo kot vsoto po vseh $k$ orbitah:

$$\sum_{i=1}^{k} (r_i - 1) n_i = 2N - 2$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{n_i}{N}\right) = 2 - \frac{2}{N}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) = 2 - \frac{2}{N}.$$

Vidimo, da je vsak seštevanec na levi strani večji ali enak $\frac{1}{2}$, desna stran enačbe pa je strogo manjša od 2. Iz tega sledi, da imamo največ 3 orbite.

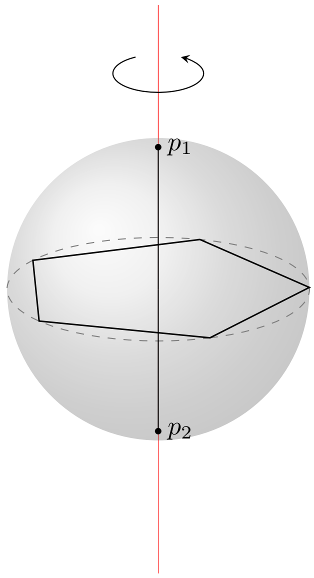
Obravnavati moramo torej 3 primere:

- Obstaja samo 1 orbita. Velja torej
$$1 - \frac{1}{r_1} = 2 - \frac{2}{N}.$$
Ker je leva stran enačbe vedno manjša od 1, desna pa večja ali enaka 1, enakosti nikoli ni zadoščeno. Zaključimo, da končna podgrupa $SO_3$, katere poli tvorijo eno samo orbito, ne more obstajati.
- Obstajata 2 orbiti. Velja torej
$$\left(1 - \frac{1}{r_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_2}\right) = 2 - \frac{2}{N}$$
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{N}.$$

Po Lagrangeevem izreku velja $r_1, r_2 \leq N$, iz česar sledi, da je $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq \frac{2}{N}$. Enakosti je zadoščeno natanko tedaj, ko je $r_1 = r_2 = N$. Po izreku 3 o orbitah in stabilizatorjih velja še $n_1 = n_2 = 1$.

Trdimo, da takšni velikosti orbit in stabilizatorjev ustrezata ciklični grupi $C_N$. Res, pri grupi rotacij za kot $\frac{2\pi}{N}$ okoli izbrane premice imamo dva pola, ki ju stabilizira vsak element grupe, zato vsak od njiju posebej tvori svojo orbito z enim elementom.

Primer ciklične podgrupe $C_5$ lahko vidimo na sliki 1. Gre za grupo rotacij za kot $\frac{2\pi}{5}$ okoli navpične osi. Vse rotacije ohranjajo v enotsko sfero vrisan pravilni petkotnik, pravokoten na os.




Slika 1: Ciklična podgrupa $C_5$ in njena pola $p_1$ ter $p_2$.

- Obstajajo 3 orbite. Velja torej

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{r_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_3}\right) &= 2 - \frac{2}{N} \\ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} &= 1 + \frac{2}{N}, \end{aligned}$$

iz česar sledi

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} > 1. \tag{1}$$

Brez škode za splošnost naj velja $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Želimo dokazati, da je $r_1 = 2$. Predpostavimo, da je $r_1 \geq 3$. Izraz $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ ocenimo navzgor

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{3}{r_1} \leq 1,$$

kar je v protislovju z neenakostjo (1). Ob dejstvu, da je $r_i > 1$, sledi $r_1 = 2$.
Denimo, da je $r_1 = r_2 = 2$, potem sledi

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} &= 1 + \frac{2}{N} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r_3} &= 1 + \frac{N}{2} \\ \frac{1}{r_3} &= \frac{2}{N}, \end{aligned}$$

iz česar sledi, da za poljuben $r_3 = k$ velja $N = 2k$.

Trdimo, da tak nabor orbit ustreza diedrski grupi $D_{2k} = \langle\{r, z\}\rangle$. Spomnimo se, da je to grupa simetrij pravilnega $k$-kotnika. Tako kot na sliki 1 liku očrtamo sfero. Konfiguracijo prestavimo v izhodišče in jo povečamo, da je sfera enotska. Skozi središče lika potegnemo premico, ki je pravokotna na ploskev lika, nato pa presečišči premice s sfero označimo s $p_1$ in $p_2$. Enako kot pri ciklični grupi element $r$ ustreza rotaciji okoli te premice za kot $\frac{2\pi}{k}$. Vidimo, da rotacije $1, r, \ldots, r^{k-1}$ tvorijo stabilizator naših dveh polov. Opazimo tudi, da zrcaljenje $z$ v treh dimenzijah ustreza rotaciji za kot $\pi$, ki med seboj menja pola $p_1$ in $p_2$. Sledi, da ta dva pola tvorita našo tretjo orbito.

Podobno lahko preverimo, da so oglišča lika poli, ki tvorijo našo prvo orbito s $k$ elementi, kjer vsak pol stabilizirata elementa grupe 1 in $z$. Drugo orbito tvorijo projekcije središč stranic na enotsko sfero. Ugotovili smo, da naš nabor velikosti orbit ter stabilizatorjev ustreza diedrski grupi.

Preostane nam torej le še primer, ko je $r_2 \geq 3$. Denimo, da je $r_2 \geq 4$. Sledi, da je izraz $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ lahko kvečjemu enak 1 in tako ponovno pridemo do protislovja z neenakostjo (1). Torej je $r_2 = 3$. Poglejmo še, katere vrednosti lahko zasede $r_3$. Vemo, da velja $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{r_3} > 1$, iz česar sledi $\frac{1}{r_3} > \frac{1}{6}$. Tako je $r_3 < 6$, oziroma $r_3 \in \{3, 4, 5\}$. Vse preostale možne velikosti orbit in stabilizatorjev lahko zdaj zberemo v tabeli 1.

| | $r_1, r_2, r_3$ | $n_1, n_2, n_3$ | $N$ |
|---|---|---|---|
| T | 2, 3, 3 | 6, 4, 4 | 12 |
| O | 2, 3, 4 | 12, 8, 6 | 24 |
| I | 2, 3, 5 | 30, 20, 12 | 60 |

Tabela 1: Možne velikosti preostalih orbit in stabilizatorjev končne podgrupe.

Trdimo, da prva izmed preostalih možnosti ustreza grupi rotacijskih simetrij tetraedra, druga ustreza grupi rotacijskih simetrij oktaedra ali kocke, telesi imata namreč isto grupo simetrij. Treja možnost pa ustreza grupi rotacijskih simetrij ikozaedra oziroma dodekaedra. Zaradi obsežnosti dokaza in dolžine tega članka ne bomo dokazovali, zakaj te velikosti orbit in stabilizatorjev enolično določijo navedene tri grupe simetrij platonskih teles. Bralec lahko dokaz poišče v zapiskih avtorja Hong Thien An Bui [3]. Vendarle pa si bomo kot zanimivost pogledati primer grupe rotacijskih simetrij kocke.

□

## 4.1 Grupa rotacijskih simetrij kocke

Začnimo s preštevanjem vseh simetrije kocke, ki porodijo grupo:

- Grupa mora vsebovati identito, ki preslika vse točke kocke same vase.
- Imamo po 3 rotacije okoli premice skozi središči nasprotnih si ploskev na kocki. Primer take rotacije imamo na sliki 2. Te premice so 3, torej je teh rotacij skupaj 9.
- Sledita še po 2 rotaciji okoli posamezne telesne diagonale v kocki, torej okoli premice skozi nasprotni si oglišči. Primer lahko vidimo na sliki 3. Kocka ima 3 telesne diagonale, torej je teh elementov skupaj 6.
- Na koncu imamo še 1 rotacijo okoli premice skozi središči nasprotnih si robov na kocki, kot lahko vidimo na sliki 4. Teh premic je skupaj 6.

Skupaj ima grupa rotacijskih simetrij kocke torej 24 elementov.

Poglejmo si še pole posameznih od enote različnih rotacij. Vzemimo enotsko sfero, v katero vrišemo kocko. Poli grupe rotacijskih simetrij kocke bodo tvorili tri orbite, in sicer glede na ploskve, oglišča in robove:

1. Prvo orbito tvorijo radialne projekcije središč robov na enotsko sfero, kot je vidno na primeru na sliki 4. Opazimo, da je moč stabilizatorja $r_1 = 2$, saj posamezen rob stabilizirata identiteta in rotacija za kot $\pi$ okoli premice skozi nasprotna si robova. Vidimo še, da je moč orbite $n_1 = 12$, ker lahko posamezen rob preslikamo v poljubnega izmed 12 robov kocke z ustrezno rotacijo.

2. Drugo orbito tvorijo oglišča kocke. Za moč stabilizatorja velja $r_2 = 3$, saj posamezno oglišče stabilizirajo identiteta in dve rotaciji okoli ustrezne telesne diagonale kocke, kot vidimo na sliki 3. Prav tako je $n_2 = 8$, ker se lahko posamezno oglišče zarotira v poljubno oglišče kocke.

3. Tretjo orbito tvorijo radialne projekcije središč ploskev kocke na enotsko sfero. Moč stabilizatorja je tokrat $r_3 = 4$, saj posamezno ploskev stabilizirajo identiteta in tri rotacije okoli premice skozi središči nasprotnih si ploskev. Podobno je moč orbite $n_3 = 6$, ker se lahko neka ploskev kocke zarotira na mesto poljubne izmed 6 ploskev kocke.

Ker ima vsak od enote različen element natanko 2 pola, lahko zaključimo, da smo res obravnavali vse pole grupe rotacijskih simetrij. Opazimo, da vrednosti velikosti orbit ter stabilizatorjev res sovpadajo z vrednostmi oktaedrske grupe v tabeli 1.

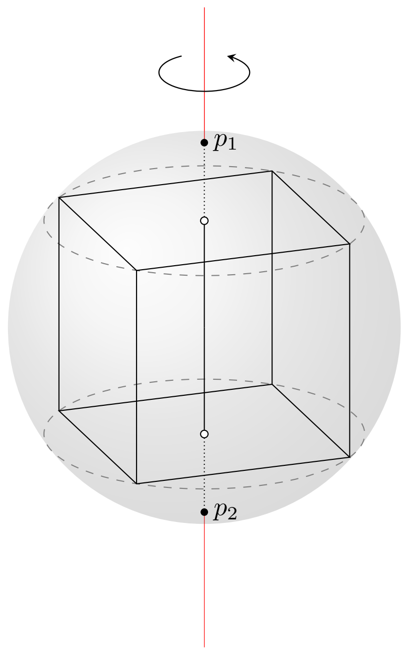
## Literatura


[1] Artin, M. *Algebra.* Pearson, 2010. Poglavji 2 in 5.

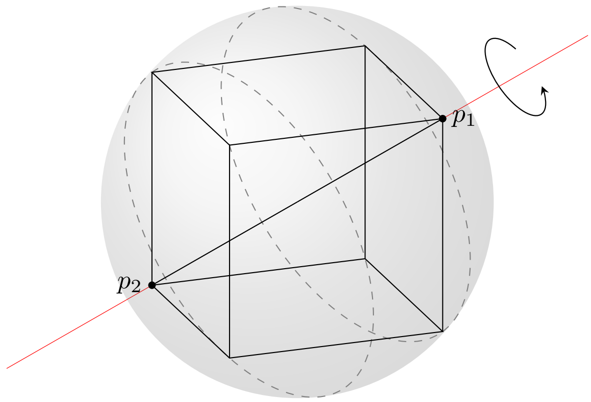
[2] Brešar, M. *Uvod v algebro.* DMFA–založništvo, Ljubljana, 2018. Poglavje 1.

[3] Hong Thien An Bui. Classifying the finite subgroups of so3. `https://math.uchicago.edu/~may/REU2020/REUPapers/Bui,An.pdf`, 2023. Poglavje 9. Dostopano: 21. avgust 2023.

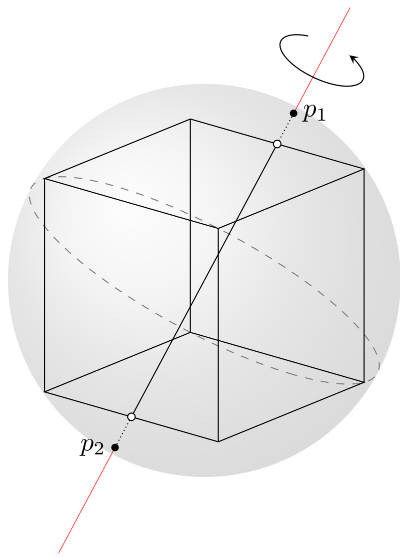
[4] Vidav, I. *Algebra.* DMFA–založništvo, Ljubljana, 2017. Poglavji 1 in 2.


Slika 2: Rotacija kocke okoli premice skozi središči nasprotnih si ploskev.




Slika 3: Rotacija kocke okoli premice skozi telesno diagonalo.




Slika 4: Rotacija kocke okoli premice skozi središči nasprotnih si robov.