Lema, ki ni Burnsideova

Manca Ernst, Rok Hudournik, Matej Knap
Mentorica: Katarina Šipec

Matematično raziskovalno srečanje, Javorniški Rovt, 30. julij - 5. avgust

Povzetek

V tem članku je kombinatorični problem razlikovanja med zapestnicami rešen na algebraičen način s pomočjo delovanja grup in uporabo Burnsideove leme.

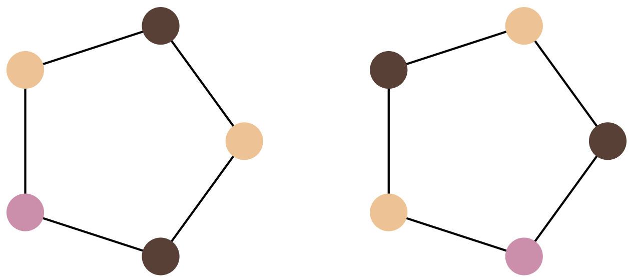
1 Uvod

Predstavljajmo si, da nam babica na zelo splošen dan podari neskončno mnogo biserov, ki se pojavljajo v n različnih barvah. Odločimo se, da bomo iz njih sestavljali zapestnice, kar pa storimo tako, da p takih biserov nanizamo na vrvico. Ker je nizanje biserov zelo naporno delo, hitro pozabimo, koliko zapestnic smo že naredili. Posledično se nam seveda porodi vprašanje, koliko različnih zapestnic bi sploh lahko sestavili.

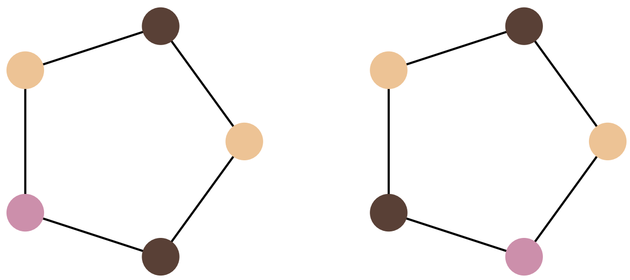
Ker smo od mučnega dela tako utrujeni, da nam je pretežko razmišljati o splošnih zapestnicah s p biseri in n barvami, najprej premislimo za $p = 5$ in $n = 3$. Reševanja problema se lotimo kombinatorično. Ker imamo za barvo vsakega posameznega bisera na zapestnici tri možnosti, vseh biserov pa je pet, najprej pomislimo, da je rešitev kar $3^5 = 243$.

Toda hitro ugotovimo, da ima naše razmišljanje veliko pomankljivost. Oglejmo si zapestnici s slike 1. Opazimo, da lahko končno mnogokrat zavrtimo eno od zapestnic in bodo biseri na njej pristali na popolnoma enakih položajih kot na drugi zapestnici. Zapestnici, za kateri velja, da lahko eno od njiju zavrtimo in dobimo enako kombinacijo biserov kot pri drugi, sta seveda enaki. Na podoben način ugotovimo, da lahko poleg rotacije izvedemo tudi zrcaljenje čez neko premico in dobimo enako zapestnico. Primer je na sliki 2.

Če ostanemo pri začetni strategiji, nam ti ugotovitvi precej otežita reševanje problema že pri $n = 3$ in $p = 5$. Zato se bomo naloge lotili na drugačen način, in sicer s pomočjo teorije grup. Spoznali bomo polgrupe in iz njih izpeljali definiciji za monoide in grupe. Posebej bomo omenili tudi diedrsko in simetrično grupo, homomorfizme ter delovanje grupe na množici. Dokazali bomo Burnsideovo lemo, s pomočjo katere bomo rešili naš problem.



Slika 1: Če prvo zapestnico zavrtimo za kot $\frac{2\pi}{5}$ v pozitivni smeri, biseri pristanejo na enakih položajih kot na drugi zapestnici.



Slika 2: Če prvo zapestnico prezrcalimo čez poševno premico, dobimo drugo zapestnico.

2 Grupe

V algebri poznamo mnogo različnih struktur na množicah, ki jih ločimo glede na njihove lastnosti. Ukvarjali se bomo z grupami, ki jih bomo tudi uporabili za reševanje zastavljenega problema.

Definicija 1. Polgrupa *P je množica skupaj z operacijo $\cdot : P \times P \to P$, ki je* asociativna*, torej za vse $x, y, z \in P$ velja*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Če v tej polgrupi P obstaja neki element e, za katerega velja

$$\forall x \in P : e \cdot x = x = x \cdot e,$$

to polgrupo imenujemo monoid*, element e pa* enota.

Monoide na kratko označimo kot $(M, \cdot, e)$, kjer je M množica, $\cdot$ operacija na množici M in e enota.

Trditev 1. *Enota je enolična.*

Dokaz. Denimo, da ima monoid M dve različni enoti e in f. Torej velja

$$f = e \cdot f = e$$

in prišli smo do protislovja, saj sta po predpostavki e in f različna. □

Primer monoida je $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, 0)$, saj pri seštevanju naravnih števil z naravnimi števili dobimo druga naravna števila, če pa prištevamo 0, ki je v tem primeru enota, dobimo nazaj isto naravno število. Še en primer je monoid $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot, 1)$.

Omeniti je vredno tudi monoid $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ, x \mapsto x)$, pri katerem so elementi vse funkcije iz realnih števil v realna števila, operacija je kompozitum funkcij, ki je definiran kot $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, in enota je simetrala lihih kvadrantov oziroma identiteta $\mathrm{id}(x) = x$.

Definicija 2. Inverz *elementa x v monoidu $(M, \cdot, e)$ je element y, za katerega velja*

$$x \cdot y = e = y \cdot x.$$

Če v monoidu M vsak element premore inverz, je M grupa.

Trditev 2. *Inverz je enoličen za vsak element g v grupi G.*

Dokaz. Naj bosta y in z dva različna inverza elementa x. Potem velja

$$y = y \cdot e = y \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z = e \cdot z = z.$$

Prišli smo do protislovja, saj sta po predpostavki y in z različna. □

Primer grupe je $(\mathbb{Z}, +, 0)$, torej množica celih števil z operacijo seštevanja in enoto 0, ki smo jo srečali že pred definicijo, medtem ko primer omenjenega monoida $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ, x \mapsto x)$ ni grupa, saj inverzi funkcij, ki niso bijektivne, ne obstajajo. Če bi se omejili le na bijektivne funkcije, bi bile te grupa za operacijo kompozitum.

Grupam lahko določimo tudi druge lastnosti. Ena od njih je *komutativnost*. Zanjo velja, da za vsaka elementa x in y velja

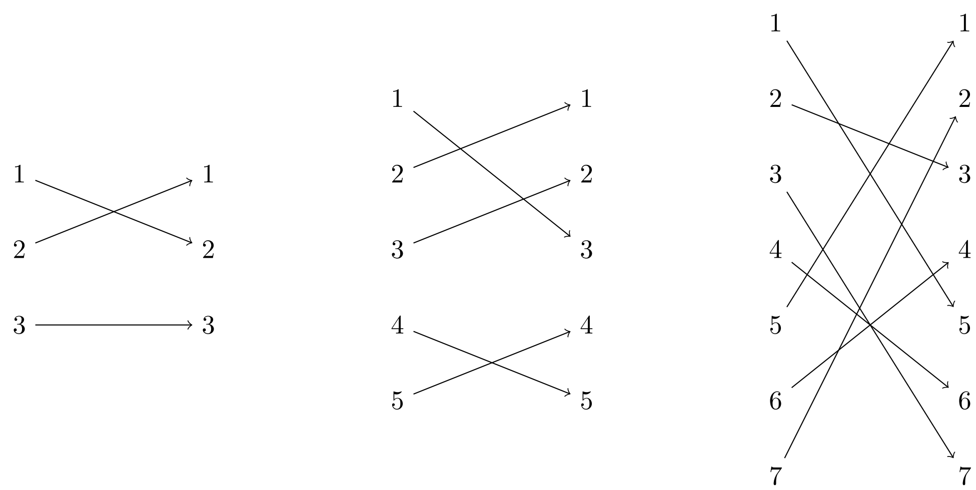
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

2.1 Simetrične in diedrske grupe

Definicija 3. *Naj bo $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ množica. Permutacija je bijektivna preslikava $[n] \to [n]$.* Simetrična *grupa je množica vseh permutacij, opremljena z operacijo $\circ$.*

Permutacije pišemo kot zmnožek disjunktnih ciklov, pri katerem vsak cikel zapišemo v oklepajih in v njih zaporedje slikanja elementov. Primer zapisa treh permutacij je na sliki 3. Permutacije množimo (kot komponiramo funkcije) z desne proti levi, torej velja na primer

$$(132) \cdot (12) = (23).$$



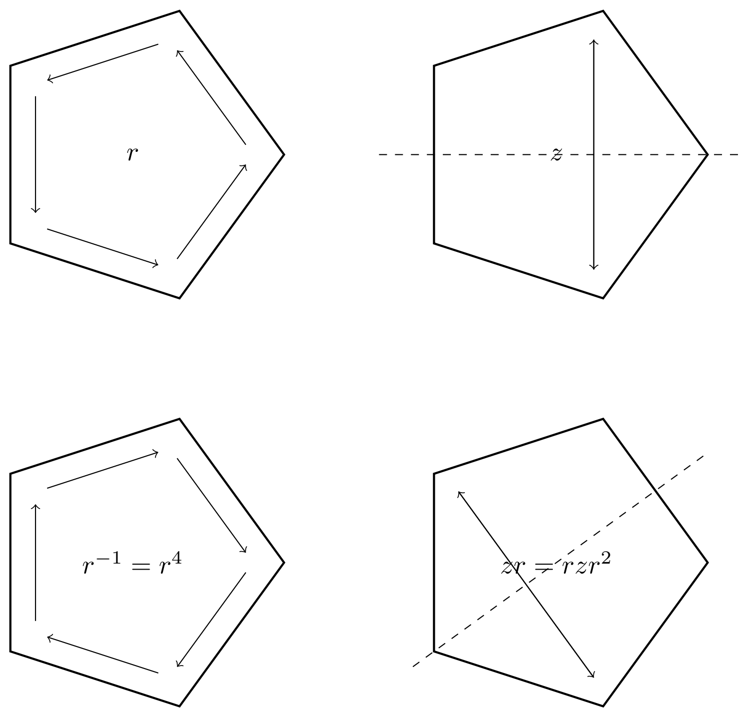
Slika 3: Na sliki so tri permutacije. Prvo pišemo kot (12), drugo kot (132)(45) in tretjo kot (15)(237)(46).

Definicija 4. Diedrska *grupa D_{2n} je grupa simetrij pravilnega n-kotnika. Definirana je kot množica*

$$D_{2n} = \{\mathrm{id}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, z, zr, zr^2, \ldots, zr^{n-1}\},$$

pri čemer vsak element razumemo kot preslikavo. Element r razumemo kot rotacijo n-kotnika, ki premakne vsako oglišče v sosednje oglišče v pozitivni smeri, element z pa kot zrcaljenje preko ene od simetrijskih osi n-kotnika. Operacija na množici D_{2n} je spet kompozitum.

Preslikave lahko vizualiziramo kot je prikazano na sliki 4 in jih prav tako beremo z desne proti levi.



Slika 4: Na sliki so prikazane štiri preslikave v D_{10}, ki po vrsti določajo elemente r, z, $r^{-1} = r^4$, $zr = rzr^2$.

2.2 Homomorfizmi

Preslikave med grupami, ki ohranjajo strukturo grupe, imenujemo homomorfizmi.

Definicija 5. *Naj bosta $(G, \cdot, e_G)$ in $(H, \cdot, e_H)$ grupi. Preslikava $\varphi : G \to H$ je* homomorfizem, *če velja*

- $\varphi(e_G) = e_H$,
- *za vsaka g in h iz G velja $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$.*

V naslednji trditvi bomo pokazali, da homomorfizem vsak inverz slika v inverz slike.

Trditev 3. *Naj bo $\varphi : G \to H$. Za vsak element $x \in G$ velja*

$$\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}).$$

Dokaz. Označimo $\varphi(x^{-1}) = y$. Velja

$$\varphi(x) \cdot y = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H.$$

Torej homomorfizem ohranja invertiranje. □

Definicija 6. Slika *homomorfizma φ je množica*

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(x); x \in G\},$$

jedro *pa množica*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in G; \varphi(x) = e_H\}.$$

Trditev 4. *Za vsak homomorfizem φ sta $\mathrm{Im}(\varphi)$ in $\mathrm{Ker}(\varphi)$ grupi.*

Dokaz. Naj bo $\varphi : G \to H$ homomorfizem in $\mathrm{Im}(\varphi)$ slika homomorfizma. Najprej pokažimo, da je množica $\mathrm{Im}(\varphi)$ zaprta za množenje. Naj bosta $w, z \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Pokazati želimo, da je zw tudi v $\mathrm{Im}(\varphi)$. Vemo, da obstajata $x, y \in G$, da velja $\varphi(x) = z$ in $\varphi(y) = w$. Velja

$$zw = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy),$$

torej je zw tudi element $\mathrm{Im}(\varphi)$. Velja tudi

$$\varphi(e_G) = e_H,$$

torej je e_H v $\mathrm{Im}(\varphi)$. Vzemimo neki $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ in dokažimo, da je $y^{-1} \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Vemo, da obstaja neki $x \in G$, da je $\varphi(x) = y$. Potem je

$$y^{-1} = \varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}).$$

Torej je $y^{-1} \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Naj bo $\mathrm{Ker}(\varphi)$ jedro homomorfizma. Najprej preverimo zaprtost za množenje. Naj bosta x in y elementa $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Velja

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = e_H e_H = e_H,$$

torej je tudi xy element $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Prav tako velja

$$\varphi(e_G) = e_H.$$

Torej $e_H \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Vzemimo neki $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ in dokažimo, da je x^{-1} element $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Vemo, da je $\varphi(x) = e_H$. Velja

$$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = e_H^{-1} = e_H.$$

Torej drži $x^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. $\square$

Zgled 1. *Naj bo $\mathbb{Z}$ grupa celih števil za seštevanje. Vsi homomorfizmi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ imajo predpis $n \mapsto xn$, kjer $x \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Naj bo $x = \varphi(1)$. Za vsako naravno število n velja

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 = 0x, \\ \varphi(n) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\varphi(1) = nx, \\ \varphi(-n) &= -\varphi(n) = -nx. \end{aligned}$$

Torej je homomorfizem natanko določen z vrednostjo $\varphi(1)$. Za vse $n, m \in \mathbb{Z}$ velja

- $\varphi(0) = x \cdot 0 = 0$,
- $\varphi(n+m) = x(n+m) = xn + xm = \varphi(n) + \varphi(m)$,

torej je ta preslikava res homomorfizem. $\square$

3 Delovanje grupe na množici

Začetni problem z zapestnicami bomo rešili s pomočjo Burnsideove leme, ki govori o lastnostih delovanja grupe na množici. Pri delovanju grupe na množici gre za to, da vsak element grupe razumemo kot preslikavo iz množice vase.

Definicija 7. *Naj bo X množica in G grupa.* Delovanje *grupe G na množici X je preslikava $G \times X \to X$, podana s predpisom $(g, x) \mapsto g \cdot x$, za katero velja:*

- $\forall x \in X\colon e \cdot x = x$,
- $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X\colon (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Delovanje označimo kot $G \curvearrowright X$.

Zgled 2. *Delovanje $G \curvearrowright X$, podano s predpisom $(g, x) \mapsto x$, imenujemo* trivialno *delovanje.*

Za delovanje $G \curvearrowright X$ bomo definirali nekatere podmnožice grupe G in množice X, ki jih bomo potrebovali za dokazovanje kasnejših rezultatov.

Definicija 8. *Naj bo G grupa, X množica in $G \curvearrowright X$ delovanje grupe G na množici X. Definiramo sledeče pojme.*

- Orbita *elementa $x \in X$ je*
$$G \cdot x = \{g \cdot x;\ g \in G\} \subseteq X.$$
Orbito lahko ekvivalentno zapišemo kot $\{y \in X;\ \exists\ g \in G,\ y = g \cdot x\}$, kar bomo kasneje uporabili.

- Stabilizator *elementa $x \in X$ je*
$$G_x = \{g \in G;\ g \cdot x = x\} \subseteq G.$$

- Množica fiksnih točk *elementa $g \in G$ je*
$$\mathrm{fix}(g) = \{x \in X;\ g \cdot x = x\} \subseteq X.$$

Izrek 1 (O orbiti in stabilizatorju)**.** *Naj bo G grupa, X množica in $G \curvearrowright X$ delovanje grupe G na množici X. V tem primeru velja:*
$$|G| = |G \cdot x| \cdot |G_x|.$$

Tega izreka ne bomo dokazovali, njegov dokaz je prepuščen bralcu. Izrek bomo uporabil za dokaz Burnsideove leme.

3.1 Particije in relacije

Kasneje bomo pokazali, da nam orbite pri vsakem delovanju na množici razdelijo množico na manjše podmnožice tako, da je vsak element v natanko eni. To lahko definiramo v splošnem.

Definicija 9. *Naj bo X množica.* Razbitje *ali* particija *množice X je družina podmnožic $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, kjer je $A_i \subseteq X$, za katero velja:*

- $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i = X$,
- $\forall i \neq j, \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$.

Particijo množice porodi relacija s posebnimi lastnostmi.

Definicija 10. Relacija *R na množici M je podmnožica $R \subseteq M \times M$, kjer pišemo*
$$(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy.$$

Ekvivalenčno relacijo R bomo zaradi preglednosti označevali z $\sim$.

Definicija 11. *Relacija $\sim\ \subseteq M \times M$, je* ekvivalenčna*, če velja:*

- *refleksivnost:* $\forall x \in M : x \sim x$,
- *simetričnost:* $\forall x, y \in M : x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
- *tranzitivnost:* $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Pokazali bomo, da lahko na množici X, na kateri deluje grupa G, vpeljemo ekvivalenčno relacijo tako, da orbite delovanja tvorijo particijo.

Trditev 5. *Naj bo G grupa, X množica in $G \curvearrowright X$ delovanje grupe G na množici X. V tem primeru je družina orbit $\{G \cdot x;\ x \in X\}$ particija množice X.*

Dokaz. Naj bo $x \sim y$ relacija s predpisom $x \sim y \Leftrightarrow x \in G \cdot y$. Ker je orbita $G \cdot x = \{y \in X;\ \exists g \in G,\ y = g \cdot x\}$ in $\forall x, y, z \in X$ veljajo:

- refleksivnost: $x \sim x$, saj $e \cdot x = x$,
- simetričnost: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$, saj
$$x \sim y \Leftrightarrow x = g \cdot y \Leftrightarrow g^{-1} \cdot x = y \Leftrightarrow y \sim x,$$
- tranzitivnost: $x \sim y\ \wedge\ y \sim z \Leftrightarrow x \sim z$, saj
$$(x = g_1 \cdot y,\ y = g_2 \cdot z) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \cdot z = x \Rightarrow x \sim z,$$

je relacija $x \sim y$ ekvivalenčna. Zato velja $y \in G \cdot x \Leftrightarrow G \cdot x = G \cdot y$, torej je družina podmnožic $\{G \cdot x;\ x \in X\}$ particija množice X. □

4 Burnsideova lema

Zdaj bomo spoznali način, s katerim lahko preštejemo število orbit. Čeprav se lema imenuje po Williamu Burnsidu, on ni bil tisti, ki jo je dokazal. Sam jo je navajal kot Frobeniusovo, toda formula je bila Cauchyju znana še pred tem. Zato se zanjo uporabljata tudi imeni Cauchy-Frobeniusova ali ne-Burnsideova lema.

Izrek 2 (Burnsideova lema)**.** *Naj bo G končna grupa, ki deluje na množici X. Potem je število orbit tega delovanja enako*

$$\#orbit = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)|.$$

Dokaz. Naj bosta G grupa in X množica, da velja $G \curvearrowright X$, in naj bo

$$\mathcal{A} = \{G \cdot x;\ x \in X\}$$

razbitje množice X, ki ga določajo orbite tega delovanja. Oglejmo si vsoto $\sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)|$. Zapisali jo bomo kot vsoto po elementih množice X. Po definiciji množice fiksnih točk velja

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)| &= \sum_{g \in G} |\{x \in X;\ g \cdot x = x\}| \\ &= |\{(g, x) \in G \times X;\ g \cdot x = x\}| \\ &= \sum_{x \in X} |\{g \in G;\ g \cdot x = x\}|. \end{aligned}$$

Ker $\{g \in G;\ g \cdot x = x\}$ predstavlja ravno predpis stabilizatorja G_x elementa $x \in X$, velja

$$\sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

Po izreku o orbiti in stabilizatorju za vsak element $x \in X$ velja

$$|G_x| = \frac{|G|}{|G \cdot x|},$$

iz česar sledi

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} |G_x| &= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G \cdot x|} \\ &= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|}. \end{aligned}$$

Zdaj poglejmo, kaj predstavlja vsota $\sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|}$. Z $|G \cdot x|$ je označena moč orbite delovanja elementa $x \in X$, ki določa razbitje $\mathcal{A}$. Ker je množica X unija vseh svojih orbit v razbitju $\mathcal{A}$, lahko vsoto po množici X razbijemo v vsote po vseh orbitah. Vsoto $\sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|}$ lahko tako zapišemo kot

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|} &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{x \in A} \frac{1}{|G \cdot x|} \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} 1 \\ &= \#\text{orbit}. \end{aligned}$$

Zaradi tranzitivnosti dobimo

$$\sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)| = |G|\ \#\text{orbit},$$

kar zaključuje dokaz. □

5 Nazaj k zapestnicam

Vrnimo se na začetni problem.

5.1 Rešitev za 5 biserov v 3 barvah

Najprej obravnavajmo primer za $p = 5$ in $n = 3$. Opazimo, da sta zapestnici enaki natanko tedaj, ko sta v isti orbiti delovanja grupe D_{10}, ki deluje na množico zapestnic z rotacijami in zrcaljenji. Pri tem je

$$D_{10} = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, r^4, z, zr, zr^2, zr^3, zr^4\}.$$

Zdaj lahko uporabimo Burnsideovo lemo, ki pravi, da je število orbit delovanja grupe na množico enako povprečnemu številu fiksnih točk. Ker je število zapestnic enako ravno številu orbit, je

$$\begin{aligned}\#\text{zapestnic} &= \#\text{orbit} \\ &= \frac{1}{|D_{10}|} \sum_{g \in D_{10}} |\operatorname{fix}(g)| \\ &= \frac{1}{10} \sum_{g \in D_{10}} |\operatorname{fix}(g)|.\end{aligned}$$

Preostane nam le, da preštejemo fiksne točke. Zanima nas, katere zapestnice bodo preslikave iz množice D_{10}, torej rotacije in zrcaljenja, ohranile.

Najprej si poglejmo identiteto id. Ker ta preslikava ohrani položaje biserov, fiksira vseh 3^5 možnih barvanj, torej je

$$|\operatorname{fix}(\mathrm{id})| = 3^5.$$

Če želimo, da rotacija ohranja barvanje, mora biti vsak biser enake barve kot biser, v katerega ga ta rotacija preslika. Edine fiksne točke so tako tista barvanja zapestnic, pri katerih so vsi biseri enake barve.[1] Iz tega sledi

$$|\operatorname{fix}(r)| = |\operatorname{fix}(r^2)| = |\operatorname{fix}(r^3)| = |\operatorname{fix}(r^4)| = 3.$$

Poglejmo še, kaj se zgodi pri zrcaljenju. Vsaka os, preko katere zrcalimo, poteka skozi natanko en biser, ostali biseri pa se bodo z zrcaljenjem paroma zamenjali. Da se bo barvanje po zrcaljenju ohranilo, je lahko biser, skozi katerega poteka os zrcaljenja, katerekoli barve, za ostale pa mora veljati, da sta bisera, ki se zamenjata, enake barve. Tako dobimo

$$|\operatorname{fix}(z)| = |\operatorname{fix}(zr)| = |\operatorname{fix}(zr^2)| = |\operatorname{fix}(zr^3)| = |\operatorname{fix}(zr^4)| = 3^3.$$

Na tak način pridemo do rešitve naloge za $p = 5$ in $n = 3$. Število zapestnic je v tem primeru enako

$$\#\text{zapestnic} = \frac{1}{10}\left(3^5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3\right) = 39.$$

5.2 Rešitev v splošnem

Problema se lotimo še v splošnem. Najprej obravnavamo primer, ko je p praštevilo. Zdaj imamo diedrsko grupo D_{2p}, zanima pa nas, na koliko različnih načinov lahko pobarvamo p biserov, pri čemer je p praštevilo, z n različnimi barvami. Identiteta id zdaj fiksira n^p, vsaka rotacija n in vsako zrcaljenje $n^{\frac{p+1}{2}}$ barvanj. Iz tega sledi, da je

$$\#\text{zapestnic} = \frac{1}{2p}\left(n^p + (p-1)\,n + pn^{\frac{p+1}{2}}\right).$$

Do zdaj smo upoštevali, da je število biserov p praštevilo. Razmislimo še, kaj se zgodi, ko imamo m biserov in n barv, pri čemer je m poljubno naravno število, večje od 2. Opazimo, da rotacij ne moremo obravnavati enako kot v prejšnjem primeru. Naj bo t tako naravno število, da velja $t \mid m$. Rotacija

[1] To lahko sklepamo, ker je p praštevilo. Isti sklep deluje za praštevila, večja od 2. V splošnem to ne deluje, npr. za $p = 6$ vidimo, da lahko izmenjaje pobarvamo bisere z dvema različnima barvama in bo rotacija r^2 prvo zapestnico preslikala v drugo, ki ji je enaka, saj velja $2 \mid 6$.

r^t fiksira vse zapestnice, ki imajo periodo t biserov. Potem moramo izbrati barvo za teh t biserov, kar naredimo na n^t načinov. Pri zrcaljenju je treba dodatno upoštevati le, da imamo zdaj lahko sodo število biserov, zato lahko gre os zrcaljenja v tem primeru bodisi skozi dva bodisi skozi nobenega od biserov. Tako z obravnavanjem deliteljev števila m rešimo nalogo še za n barv in m biserov, kjer sta n in m poljubni naravni števili.

6 Zaključek

Na videz kombinatorično nalogo nam je uspelo rešiti s pomočjo teorije grup. Spoznali smo osnovne algebrske strukture, kot so polgrupe, monoidi in grupe, posebej smo omenili simetrično in diedrsko grupo. Prav tako smo opisali homomorfizme ter delovanje grupe na množici. Tako smo prišli do Burnsideove leme, ki je bila ključna za rešitev problema z zapestnicami.

Literatura

[1] M. Brešar, *Uvod v algebro*, Matematični rokopisi (številka 26), DMFA - založništvo, Ljubljana, 2018.

[2] zapiski s predavanj Igorja Klepa pri predmetu Algebra 3, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2020.