Poliedri in življenje na Marsu

Izidor Lamot, Jana Vidrih, Irena Drenšek
David Gajser

Uvod

V našem projektu bomo prikazali kako se »življenje na Marsu« povezuje tudi z matematiko.
ALH 84001 je meteorit, ki so ga našli v kraju Allan Hills na vzhodu Antarktike leta 1984. Našla ga je skupina iskalcev meteoritov iz projekta ANSMET. Ko so leta 1996 znanstveniki sporočili, da vsebuje mikroskopske strukture, ki bi lahko bile fosilne bakterije - prve sledi življenja, je postal eden izmed najbolj znanih meteoritov. Spore bakterij in organizmov, ki lahko obstojajo v kamninah, bi lahko po predvidevanjih živele v vesolju do 5 let. To pomeni, da je prenos življenja z Marsa na Zemljo teoretično možen!
V meteoritu so našli tudi kristale v obliki prirezanega heksa-oktaedra, ki niso produkt nobenega znanega anorganskega procesa v naravi. Tvorijo jih pa bakterije. Strukture imajo od 20 do 100 nanometrov v premeru.

Poliedri

Poliedri so geometrijska telesa z ravnimi mejnimi ploskvami. Nas v projektu zanimajo predvsem poliedri, ki imajo veliko stopnjo simetrije in zato izkazujejo lepoto oblike. Poliedre delimo na konveksne in nekonveksne. Konveksni so tisti, ki nimajo nobenega dela vbočenega oz. matematično: če izberemo poljubni dve točki v notranjosti poliedra in ju povežemo z daljico, mora celotna ležati v notranjosti. Nekonveksni poliedri so tisti, ki niso konveksni. Podrobneje si oglejmo konveksne poliedre, ki imajo za ploskve pravilne mnogokotnike. Ta razdelimo na platonska telesa, arhimedska telesa, enakorobe pokončne prizme, enakostranične antiprizme in Johnsonova telesa.
Zanimanje za poliedre izvira iz stare Grčije, kjer so že poznali platonska telesa.

Definicija *Platonska telesa so konveksni poliedri, ki imajo za mejne ploskve skladne pravilne večkotnike ene vrste in imajo vsa oglišča enako konfiguracijo.*

Platonska telesa so:

- **tetraeder**
  omejujejo ga 4 enakostranični trikotniki, ki se po 3 stikajo v posameznem oglišču
- **oktaeder**
  omejuje ga 8 enakostraničnih trikotnikov, ki se po 4 stikajo v posameznem oglišču
- **ikozaeder**
  omejuje ga 20 enakostraničnih trikotnikov, ki se po 5 stikajo v posameznem oglišču
- **kocka ali heksaeder**
  omejuje ga 6 kvadratov, ki se po 3 stikajo v posameznem oglišču
- **dodekaeder**
  omejuje ga 12 pravilnih petkotnikov, ki se po 3 stikajo v vsakem oglišču

Izrek Platonskih teles je natanko 5.

Dokaz Namesto strogega matematičnega dokaza bomo naredili bolj intuitiven dokaz. Poglejmo si oglišče A v platonskem telesu, sestavljenem iz samih trikotnikov. V A se lahko stika le 3, 4 ali 5 ploskev. Če bi se v A stikalo 6 ali več ploskev, ta polieder ne bi bil več konveksen ali pa se ne bi niti dvignil iz ravnine. V mreži bi namreč 6 trikotnikov ob oglišču A zapolnilo ves kot okoli A in konveksnega telesa ne bi mogli narediti.
Če se v A stikajo sami kvadrati ali sami petkotniki, so ti lahko le trije. Iz podobnega razloga kot pri trikotnikih tudi štirje kvadrati ali pravilni petkotniki okoli oglišča A v mreži zapolnijo ves kot in jih ne moremo dvigniti do konveksnega poliedra.
Dokazali smo torej, da je platonskih teles največ 5. Ker so tetraeder, oktaeder, ikozaeder, dodekaeder in kocka platonska telesa, jih je natanko 5.

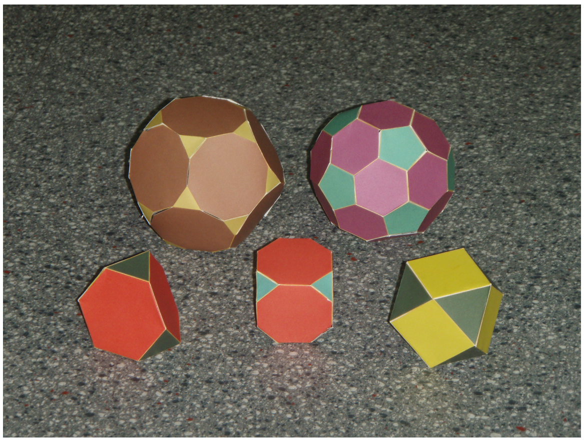
Definicija *Arhimedska telesa so polpravilni*

[1] Polpravilni polieder je polieder, ki ima za ploskve same pravilne mnogokotnike in je njegova grupa simetrij tranzitivna na ogliščih. To pomeni, da če izberemo poljubni oglišči A in B, obstaja nek element iz grupe simetrij tega poliedra, ki preslika A v B.

poliedri[1]*, ki imajo za mejne ploskve različne pravilne večkotnike, vsa oglišča pa imajo enako konfiguracijo.*

Takšnih teles je 13.

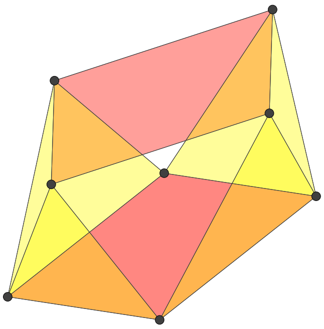
Na sliki 1 je prikazanih 5 prirezanih platonskih teles, ki so tudi arhimedska in sicer od leve proti desni: zadaj prirezani dodekaeder in prirezani ikozaeder, spredaj prirezani tetraeder, prirezani heksaeder in prirezani oktaeder.



Slika 1 Arhimedska telesa

Definicija *Enakorobe pokončne n-strane prizme so pravilni poliedri z dvema osnovnima ploskvama A in B ter plaščem. A in B morata biti pravilna n-kotnika in obstajati mora translacija v smeri pravokotno na A, ki A preslika v B. Plašč je sestavljen iz kvadratov, ki povezujejo osnovni ploskvi.*

Definicija *Enakoroba n-strana antiprizma je polieder, sestavljen iz dveh vzporednih kopij pravilnega n-kotnika, ki ju povezuje plašč enakostraničnih trikotnikov.*



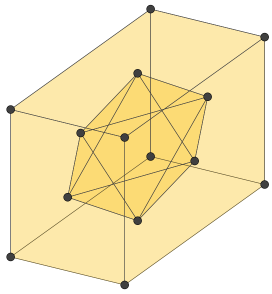
Slika 2 Enakoroba 4-strana antiprizma

Definicija *Johnsonovo telo je konveksni polieder s ploskvami iz pravilnih mnogokotnikov, ki ni plantonsko telo, arhimedsko telo, prizma ali antiprizma. Teh teles je 92.*

Duali

Vsak polieder ima svoj dualni polieder. Njegova oglišča ležijo na ploskvah prvotnega poliedra in so povezana tako, da sta sosednji ploskvi originala povezani z robom. Dual duala je spet prvotni polieder.
Nekaj zanimivih primerov:

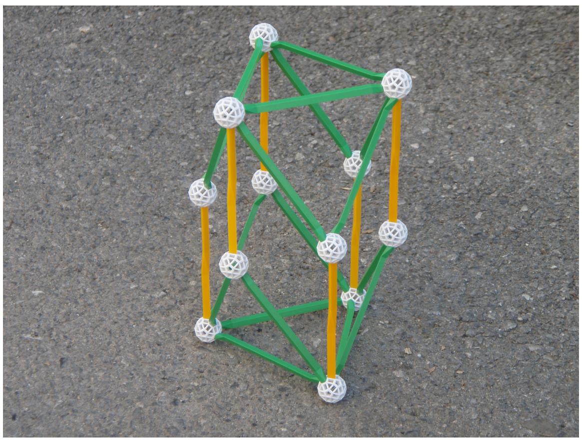
- Dual ikozaedra je dodekaeder,
- Dual tetraedra je tetraeder,
- Dual heksaedra je oktaeder:



Slika 3 Dual kocke

Trunkacija

Če poliedru odsekamo nekaj oglišč, dobimo prisekan polieder. Običajno s prisekanim poliedrom označujemo polieder, ki ima odsekana vsa oglišča. Trunkacija je postopek, pri katerem iz poliedra dobimo prisekan polieder.
Spomnimo se prirezanega heksa-oktaedra iz uvoda. Heksa-oktaeder je polieder, sestavljen iz 8 enakostraničnih trikotnikov in 6 paralelogramov.



Slika 4 Heksa-oktaeder

Če heksa-oktaedru odsekamo vsa oglišča stopnje 5, dobimo prisekan heksa-oktaeder, ki je povezan z dokazovanjem življenja na Marsu, kot je predstavljeno v uvodu.

Simetrija poliedrov

V običajnem življenju simetrija pomeni skladnost levega in desnega dela telesa, bolj natančno, dela sta zrcalni podobi drug drugega. V matematiki pomeni simetrija preslikavo telesa samega vase, pri čemer se slika ne razlikuje od originala.

Definicija *Grupa simetrij poliedra je množica vseh tistih izometrij prostora, ki ohranjajo polieder.*

Zrcaljenje preko točke je primer simetrije poliedra. Za zrcaljenje okoli točke velja, da če telo dvakrat prezrcalimo, dobimo spet prvotno telo.
Rotacijsko simetrijo imajo telesa, za katera obstaja rotacija, ki jih preslika vase. To si lahko enostavno predstavljamo tako, da vzamemo neko telo in ga zavrtimo okoli osi za določen kot. Težje si predstavljamo zrcaljenje, saj ga z rotacijami ne moremo simulirati. Za poliedre obstaja le 5 sistemov rotacijske simetrije: ciklična, diedrska, tetraedrska, oktaedrska in ikozaedrska.

Sistemi rotacijskih simetrij:

- **Ciklična simetrija**
  je najenostavnejši primer rotacijske simetrije. Telo s ciklično simetrijo ima vsaj eno rotacijsko os. Najdemo jo na primer pri piramidah, zvezdah ...

  Izrek Za vsako rotacijsko os poliedra A obstaja tak najmanjši kot α, da je rotacija za α okoli te osi v grupi simetrij poliedra A. Vse ostale rotacije okoli te osi, ki so v grupi simetrij poliedra A, so natanko mnogokratniki rotacije za kot α.

  Dokaz Naj bo y rotacijska os poliedra A in naj bo α tak najmanjši kot, da je rotacija za α okoli te osi v grupi simetrij A. Naj bo rotacija za β okoli y iz grupe simetrij poliedra A in naj bo k najmanjše tako naravno število, da je $k * \alpha + \beta \geq 360°$. Potem velja: $k * \alpha + \beta$ je v grupi rotacij poliedra A okoli osi y in zato $k * \alpha + \beta = 360°$ ali $k * \alpha + \beta \geq 360° + \alpha$. Vemo, da je bil k najmanjši tak, da je $k * \alpha + \beta \geq 360°$. Torej $k \cdot \alpha + \beta = 360°$. Če vzamemo $\beta = 0$, vidimo, da obstaja tak l, da je $l * \alpha = 360°$. Sledi: $\beta = (l - k) * \alpha$.

  Definicija *Naj bo A polieder, y os rotacijske simetrije in α rotacija za najmanjši kot okoli te osi. Red osi y je tako najmanjše število k, da je $\alpha^k = id$.*

  Izrek Naj bo A polieder, y os rotacijske simterije reda k in β rotacija okoli te osi. Potem je $\beta^k = id$.

  Dokaz obstaja l, da velja $\beta = \alpha^l$. Torej: $\beta^k = (\alpha^l)^k = (\alpha^k)^l = id$.

- **Diedrska simetrija**
  Telo A z diedrsko simetrijo ima v grupi simetrij vsaj 2 elementa. Ta dva sta rotacija okoli *glavne osi* za kot α in rotacija okoli *stranske osi*, ki je pravokotna na *glavno os*, za kot 180°. Seveda mora grupa simetrij telesa A vsebovati tudi vse kompozitume teh dveh elementov.
- **Tetraedrska simetrija**
  Telo A s tetraedrsko simetrijo ima 7 takih rotacijskih osi kot tetraeder. Ta ima:
  - 4 osi reda 3, ki gredo iz enega oglišča do sredine nasprotne mejne ploskve,
  - 3 osi reda 2 pa skozi sredine nasprotnih robov.
- **Oktaedrska simetrija**
  Telo A z oktaedrsko simetrijo ima 3 množice takih rotacijskih osi kot oktaeder. Ta ima:
  - 3 med seboj pravokotne osi reda 4. Vsaka takšna os gre skozi nasprotni oglišči,
  - 4 osi reda 3. Te gredo skozi središča nasprotnih mejnih ploskev,
  - 6 osi reda 2. Te gredo skozi središča nasprotnih robov.
- **Ikozaedrska simetrija**
  Telo A z ikozaedrsko simetrijo ima 31 rotacijskih osi kot ikozaeder. Ta ima:
  - 6 osi reda 5, ki potekajo skozi nasprotni oglišči,
  - 10 osi reda 3, ki potekajo skozi središča nasprotnih mejnih ploskev,
  - 15 osi reda 2, ki potekajo skozi središča nasprotnih robov.

Zraven rotacijske je ena izmed pomembnejših simetrij tudi zrcalna simetrija. Telo ima zrcalno simetrijo, če obstaja ravnina, da zrcaljenje preko te ravnine ohranja telo. Primer zrcalne simetrije pri kvadratu je zrcaljenje preko ravnine, vzporedne z dvema ploskvama, ki gre skozi težišče.

Zrcalna simetrija je zelo pogosta tudi v naravi. Tako so na primer človeška, metuljeva, žabina, ribja ... leva in desna polovica telesa zrcalno simetrični. Taki simetriji v biologiji rečemo bilateralna simetrija.

Slika 5 Simetrija v naravi

V glasbi smo pogosto priča ponavljanju teme in v Beethovnovi 5. simfoniji hitro opazimo simetrijo. Tudi v drugih zvrsteh umetnosti simetrija igra pomembno vlogo. Za konec navedimo še nekaj primerov: v arhitekturi slaven Eifflov stolp, Tadž Mahal, Stonehenge, pri športu sinhrono plavanje...

Literatura

- Simetrija. Online. 29. avgusta 2008, http://torina.fe.uni-lj.si/~izidor/Delavnica/Rotacijska_simetrija.pdf
- Life on Mars. Online. 29. avgusta 2008 www.georgehart.com/zomebook/life-on-mars.html
- ALH 84001. Online. 29. avgusta 2008 http://sl.wikipedia.org/wiki/ALH_84001
- Polieder. Online. 29. avgusta 2008, http://sl.wikipedia.org/wiki/Polieder
- Hafner I.,(2006/2007). Logika in razvedrilna matematika 1. šestnajsti letnik. Poliedri
- Hafner I.,(2006/2007). Logika in razvedrilna matematika 3. šestnajsti letnik. Simetrija
- Hafner I.,(2007/2008). Logika in razvedrilna matematika 2. sedemnajsti letnik. Duali
- Hafner I.,(2007/2008). Logika in razvedrilna matematika 3. sedemnajsti letnik. Arhimedska telesa