Zlati rez

Nives Naraglav, Saša Dreme, Urša Pertot
Mentor: Dejan Širaj

Vrtnica, Taj Mahal, človek, pravilni petkotnik in renesansa morda na videz nimajo skupnih točk. Vendar če združimo moč narave, človekov občutek za estetiko ter matematični um, kmalu dobimo popolno razmerje zlatega reza, ki povezuje na videz nepovezane pojme.

Definicija in osnovne lastnosti

Zlati rez je razmerje, ki ga ponazorimo z razdelitvijo daljice na dva neenaka dela, tako da je razmerje med celoto in daljšim delom enako razmerju med daljšim in krajšim delom.

Število zlatega reza, ki ga ponavadi označimo s Φ, izračunamo neposredno iz definicije:

$$
\begin{aligned}
\frac{m+M}{M} &= \frac{M}{m}\\
\frac{m}{M}+1 &= \frac{M}{m}\\
\Phi^{-1}+1 &= \Phi\\
\Phi^2-\Phi-1 &= 0\\
\Phi_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\
\Phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
\Phi &= 1,61803\ldots
\end{aligned}
$$

Iz izračuna je očitno, da je Φ algebraično število, saj je rešitev neke enačbe z racionalnimi koeficienti. Poleg tega je tudi iracionalno število, kar je razvidno iz naslednjega premisleka. Denimo, da je Φ element množice racionalnih števil.

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
2\Phi-1 &= \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Ker velja, da množenje racionalnega števila z 2 in odštevanje 1 od racionalnega števila spet da racionalno število, $\sqrt{5}$ pa je iracionalno število, smo prišli do protislovja in tako dokazali, da je Φ res iracionalno.

Povezanost s Fibonaccijevim zaporedjem

Fibonaccijevo zaporedje je zaporedje števil, ki so vsota dveh svojih predhodnikov.

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0\\
F_1 &= 1\\
F_n &= F_{n-1}+F_{n-2}
\end{aligned}
$$

Tako dobimo števila: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Iz formule za splošni člen Fibonaccijevega zaporedja, ki jo dobimo s pomočjo linearnih rekurzivnih enačb, je lepo razvidna zveza med Fibonaccijevim zaporedjem in številom zlatega reza:

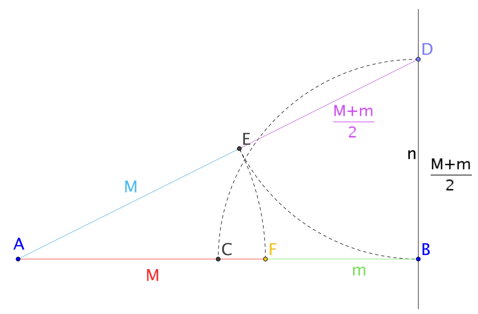
$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\\
F_n &= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot(\Phi^n+(1-\Phi)^n)
\end{aligned}
$$

Kvocient dveh zaporednih Fibonaccijevih števil vedno bolj stremi k številu zlatega reza. To trditev bolj formalno napišemo na naslednji način:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Phi$$

Konstrukcija zlate točke

Na začetku imamo dano daljico AB z razpoloviščem v točki C. Skozi točko B narišemo pravokotnico in na njej točko D tako, da je $|BC| = |BD|$. Na daljici AD označimo točko E tako, da je $|DB| = |DE|$. Na daljici AB označimo točko F tako, da je $|AF| = |AE|$. Točka F je zlata točka daljice AB.

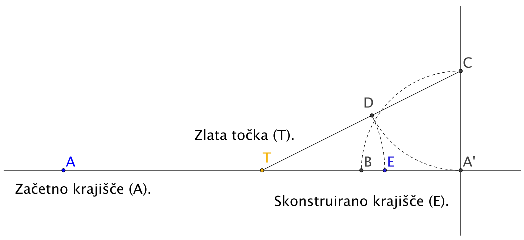


Dokaz, da je F res zlata točka daljice AB, preprosto izvedemo s Pitagorovim izrekom za trikotnik ABD:

$$\left(\frac{M+m}{2}\right)^2 + (M+m)^2 = \left(M + \frac{M+m}{2}\right)^2$$
$$\frac{m^2+2Mm+M^2}{4} + m^2 + 2Mm + M^2 = \frac{9M^2+6Mm+m^2}{4}$$
$$M^2 - Mm - m^2 = 0$$
$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0$$
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Konstrukcija drugega krajišča daljice ob znanem enem krajišču in zlati točki

Dano je krajišče A daljice AE in zlata točka T na njej. Na nosilki daljice AT označimo točko A' tako, da velja $|AT| = |A'T|$. Po prej opisanem postopku skonstruiramo zlato točko E za daljico TA'.

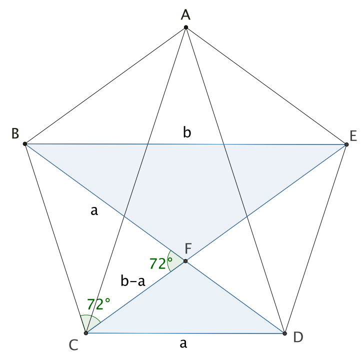


Spodnji račun pokaže, da je točka E iskano drugo krajišče dane daljice:

$$|AT| = |TA'| = a \qquad \frac{a}{a-c} = \frac{a-c}{c}$$
$$|AE| = e \qquad \frac{a}{e-a} = \frac{e-a}{2a-e}$$
$$|EA'| = c \qquad e^2 - ae - a^2 = 0$$
$$c = 2a - e \qquad \frac{a}{e-a} = \frac{e}{a}$$

Zlati petkotnik

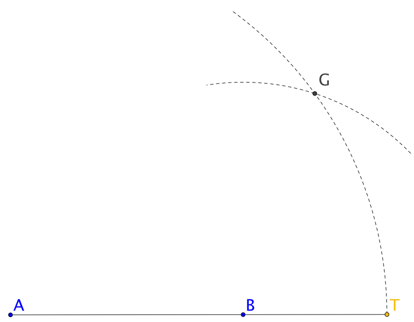
V petkotniku zlatih rezov kar mrgoli. Najpomembnejše je tisto med diagonalo in stranico, ki ga bomo v naslednjih vrsticah tudi dokazali.



Petkotnik je pravilen, zato je štirikotnik $BCDE$ enakokrak trapez, od koder sledi, da sta daljici BE in CD vzporedni. Trikotnika BFE in CDF imata torej vse pare stranic vzporedne, zato sta podobna. Ni težko videti, da sta kota $\angle BCF$ in $\angle CFB$ enaka, iz česar sledi, da je trikotnik FBC enakokrak. Preko zgoraj omenjenih podobnih trikotnikov lahko dokažemo, da je razmerje med stranico in diagonalo pravilnega petkotnika enako Φ, na naslednji način:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$$
$$b^2 - ab - a^2 = 0 \qquad z = \frac{b}{a}$$
$$z^2 - z - 1 = 0$$
$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Konstrukcija pravilnega petkotnika



Na začetku imamo dano stranico AB pravilnega petkotnika $ABCDE$. Nato po prejšnjem postopku skonstruiramo točko T tako, da je B zlata točka daljice AT. Ker sta diagonala in stranica pravilnega petkotnika v razmerju zlatega reza, je dolžina daljice AT enaka dolžini diagonale. Zato samo v točki A narišemo krožnico z radijem $|AT|$, v točki B pa krožnico z radijem $|AB|$, in presečišče teh dveh krožnic predstavlja tretje oglišče C. Ostali točki narišemo po istem postopku.

Zlati rez v umetnosti in naravi

Zlati rez naj bi bilo najboljše možno vodilo vseh, ki poskušajo lepoto skladno ujeti v sliki ali izklesati v kamnu. Tako ljudje že tisočletja uporabljajo zlati rez v arhitekturi (egipčanske piramide, grški Partenon, Notre Dame, Taj Mahal, CN Tower,...), slikarstvu (predvsem renesančni umetniki), kiparstvu,...

Človek je dobil navdih za zlati rez z opazovanjem narave in samega sebe. Pri človeku ga lahko med drugim najdemo v razmerju med podlahtjo in dlanjo.

Pri rastlinah in živalih gre predvsem za učinkovito izkoriščanje potenciala. Biologi so ugotovili, da rastlina absorbira največ svetlobe, če ima liste okoli stebla razporejene tako, da je med vsakim naslednjim kot Φ, to pomeni, da na en obrat pride Φ listov. Podobno velja za razporeditev semen v cvetu in cvetnih listov, kar prikazuje spodnja fotografija.

Viri

- Dunlap, R. (1997). The golden ratio and Fibonacci numbers. New Jersey: World Scientific
- WIKIPEDIA. Online. Citirano 29. avgusta 2008 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
- Špenko, Š., Kovač, B., Širaj, D. (2004). Zlati rez (raziskovalna naloga). Ljubljana: Gimnazija Bežigrad