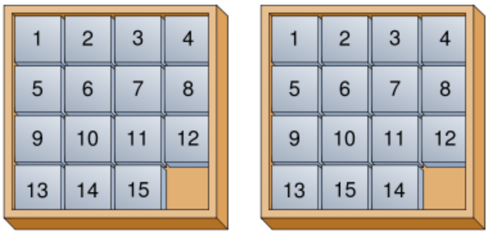
Uganka 15

Blaž Peterlin, Filip Kozarski, Matjaž Leonardis
Nino Bašič (mentor)

Problem



Začetna postavitev   Iskana postavitev

Slika 1 ime slike

V 70. letih 19. stoletja je sestavljalec ugank Sam Loyd ponudil, nagrado v višini 1000$ tistemu ki mu uspe rešiti naslednji problem:
Imamo kvadratno 4×4 tabelo. Vsa polja (razen zadnjega) so po vrsti označena s števili od 1 do 15. Edina dovoljena poteza je zamenjati neoznačeno polje s katerimkoli izmed njegovih sosedov.
Poiskati je potrebno zaporedje takih potez, da začetno razporeditev spremenimo v razporeditev, ki ima po vrsti označena polja od 1 do 13, preostali polji pa sta zamenjani. (glej sliko)
V naslednjem članku bomo predstavili kriterije, kdaj je možno neko postavitev plošče dobiti iz začentne (slika.1),predstavili pa bomo tudi nekaj algoritmov kako iz poljubne dovoljene začetne postavitve dobiti postavitev na sliki slika.1.

Rešljivost

Označimo vsa polja po vrsti s števili od 1 do 16. Prav tako označimo vse kvadrate z števili od 1 do 15. Prazno polje nosi število 16. Označimo z a_i kvadratek ki stoji na i-tem polju.Naj bo d minimalno število premikov ki jih moramo opraviti da spravimo prazno polje na polje 16. Naj bo $\mathcal{S}$ število vseh takih parov (i, j) da velja $i < j$ in $a_i > a_j$. Če zaporedje števil kvadratov predstavimo kot permutacijo potem je $\mathcal{S}$ enak številu ciklov dolžine 2 v ciklični predstavitvi permutacije. Potem je neko postavitev možno dobiti iz tiste na sliki (slika.1) natanko tedaj ko je

$$d + \mathcal{S} \equiv 0 (\text{mod } 2)$$

Dokaz:
Dokaz bomo opravili v dveh korakih. Najprej bomo dokazali da na noben način ne moremo dobiti postavitev pri kateri zgornje nebi veljalo,potem pa pokazali da vse ki usterzajo zgornjemu kriteriju lahko dobimo.
Najprej dokažimo naslednjo lemo:
Lema: Parnost števila $d + \mathcal{S}$ se ohranja.
Dokaz: V vsaki potezi se lahko prazno polje premakne v eni izmed smeri na sliki. Pglejmo kaj se zgodi z parnostjo $d + \mathcal{S}$. Iz zgornje slike se zelo lepo vidi da se d z vsakim premikom spremeni parnost. Če zamenjamo poljubni sosdnji plošči-ci(naj bosta to a_i in a_j) bo novonastala permutacija ravno prejšnja pomnožena s ciklom (a_i, a_j). Torej se spremeni parnost tudi $\mathcal{S}$. Ker se je spremenila parnost tako d kot $\mathcal{S}$ se parnost njune vsote ni spremenila. ■
Ker je pri začetni postavitvi $d + \mathcal{S}$ soda , vemo pa da se parnost ohranja torej nobena postavitev ,kjer je $d + \mathcal{S}$ lih ni dosegljiva.
Sledi koda, ki preveri ali se neko postavitev da spremeniti v tisto na sliki slika.1

```
function resljiva(puzzle:array[1..4,1..4] of integer):boolean;
var i,j,i1,j1:integer;
    st_parov,razdalja:integer;
begin
st_parov:=0;
razdalja:=0;
for i:= 1 to 4 do
 for j:= 1 to 4 do
  begin
    if puzzle[i,j]=0 then razdalja:=8-i-j;
    for i1:=i to 4 do
     for j1:= j to 4 do
       begin
        if puzzle[i,j]>puzzle[i1,j1] then st_parov:=st_parov+1;
       end;
   end;
   resljiva:= (st_parov+razdalja) mod 2=0;
end;
```