

MAtematično Raziskovalno Srečanje
2006 - 2007 - 2008

Zbornik projektov

DMFA Slovenije, 2008

Matematično raziskovalno srečanje MARS 2006 – 2007 – 2008: Zbornik projektov

Uredil: Boštjan Kuzman
Oblikovanje: Mojca Miklavc
Fotografije: Boštjan Kuzman in Katja Berčič
Naslovnica in kolaž: Katja Berčič

Založila: DMFA Slovenije
Naklada: 500 izvodov
Tisk: Birografika Bori
V Ljubljani, 2008.

Natis publikacije je omogočilo sofinanciranje Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo

Kazalo

O življenju na MARSu	5
O predavanjih in predavateljih	6
Seznam delavnic in drugih aktivnosti	9
MARSovski projekti dijakov	10
2006	10
<i>Prvi koraki v sferični geometriji</i>	11
<i>Košarka, zaporniki in teorija iger</i>	12
<i>Finančna perspektiva podjetja Mars</i>	14
<i>Buffonova igla</i>	15
<i>Met košarkarske žoge</i>	17
2007	19
<i>Najhitrejša pot po Marsu</i>	20
<i>Nemogoče razporeditve, poliedri, ploščine in Eulerjeva formula</i>	22
<i>Marsovi sateliti in cikloidne krivulje</i>	28
<i>Stožnice v taksi razdalji</i>	31
<i>Bézierjeve krivulje</i>	35
<i>Optimalna dostava goriva in Fermatova točka</i>	38
2008	41
<i>Hiperkocka</i>	42
<i>Poliedri in življenje na Marsu</i>	44
<i>Zlati rez</i>	48
<i>Biljard</i>	51
<i>Igra 15</i>	53
<i>Inverzija in Möbiusove transformacije</i>	55
MARSovski blog 2007	58
Gremo na MARS 2008!	59
MARS so omogočili	60



O življenju na MARSu

Iz kapitanovega dnevnika

Ko sem se pred dvema letoma prvič odpravil na MARS v Koper z majhno skupino dijakov, si niti najmanj nisem predstavljal, na kakšno potovanje se sploh podajam. Skupaj s študenti Urošem, Kajtjo in Mojco smo pripravili nekaj matematično-računalniških delavnic, povabili še dva predavatelja in izbrali nekaj možnih tem za krajše skupinske projekte. A le kdo bi si takrat upal staviti, da bo prijavljenim dijakom vse to sploh zanimivo?

Ideja o matematičnem raziskovalnem taboru za srednješolce sicer ni bila posebej nova. Želeli pa smo si bolj kot reševanje tekmovalnih nalog izpostaviti ustvarjalno raziskovanje raznovrstnih problemov in spoznavanje širše vloge matematike v sodobnem svetu. Zamisel, da se dijaki v nekaj dnevih naučijo osnov uporabe računalniških programov za matematiko in jih uporabijo pri izdelavi interaktivnih modelov, s katerimi naj ilustrirajo svoje lastne krajše članke, pa se je zdelo kar noro ambiciozno. A MARSovci in MARSovke, ki so se prijavili za naše potovanje, so bili res kot iz drugega planeta. Njihovo navdušenje nas je vse skupaj odneslo v breztežno stanje. Ob duhovitih nastopih predavateljev, zabavnih matematičnih odkritjih v delavnicah, napetih večerih ob strateških igrah in nikoli povsem končanih projektih smo pozabili, kdaj je noč in kdaj je dan.

In skoraj vsi smo se odpravili na MARS tudi leto kasneje. Letošnje potovanje pa je že tretje zapored in vsako leto je naš program aktivnosti daljši in bolj pester. MARSovski popotniki iz prejšnjih let se radi vračajo, z njihovim številom raste tudi naša posadka. Vedno znova me s svojo zagnanostjo presenečajo izjemni mladi ljudje, ki se tukaj zberejo, da bi se med poletnimi počitnicami ob druženju z vrstniki ukvarjali z matematiko. Ko pišem te vrstice, se je zadnji letošnji MARSovski večer že prevesil v noč, dijaki okoli mene pa v računalnici še vedno zavzeto pripravljajo svoje projekte. Od tam gotovo ne bodo

šli naravnost v posteljo, a prepričan sem, da bo jutrišnja predstavitev najboljša do sedaj. Za to ima glavne zasluge moja čudovita posadka: Kajtja, Mojca, Nino, Peter, David, Dejan, Gašper in Tine.

Še številni ljudje pa so zaslužni, da je naše vesoljsko plovilo sploh vzletelo. Prof. dr. Dragan Marušič in prof. dr. Andrej Brodnik sta MARSovcem gostoljubno ponudila prostor za delo na Univerzi na Primorskem, dvakrat na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije in enkrat na Pedagoški fakulteti v Kopru. Formalne okvire za pripravo projekta sta nam zagotovila DMFA Koper na čelu s predsednikom Aljošo Žerjalom in DMFA Slovenije, ki mu je predsedoval dr. Milan Hladnik. Prof. dr. Peter Šemrl pa je kot prvi gostujoči predavatelj s svojim nastopom dal potrebno kredibilnost MARSovskim predavanjem. Posluh za naše ideje so imeli tudi na Javni agenciji za raziskovalno dejavnost RS, ki je bila glavni sofinancer programa, s svojimi prispevki pa so dijakom in študentom olajšali udeležbo tudi Ministrstvo za šolstvo in šport RS, Študentska organizacija Univerze v Ljubljani, podjetje Hypo leasing in Študentski svet FMF. Vsem se iskreno zahvaljujem za podporo in upam, da lahko nanjo še računamo.

Nazadnje pa naj se zahvalim še vam, dragi MARSovci. Prepričan sem, da boste nekateri od vas v življenju šli še daleč – morda bo med vami kdo prav zares poletel v vesolje. Dotlej pa naj MARS ostane naš simbol za odkrivanje neznanega, skrivnostnega sveta, kamor še ni stopila človeška noga. Sveta, ki je plod naše neverjetne človeške domišljije. Sveta matematike.

Boštjan Kuzman, vaš kapitan.

V Kopru, 29. avgusta 2008 ob 23.35, do pristanaka še 00 dni, 16 ur, 24 minut in 43 sekund.

O predavanjih in predavateljih

MARSovska predavanja so namenjena predvsem širjenju obzorij. Dijaki in drugi poslušalci ob raznovrstnih temah in predavateljih spoznavajo nove matematične vsebine, njihovo uporabo na različnih znanstvenih ali tehničnih področjih in pomen raziskovalnega dela v sodobni družbi.

Predstavitev predavateljev



Prof. dr. Peter Šemrl

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za mat. in fiziko

31. avgust 2006

Zakaj matematike zanimajo realna števila?

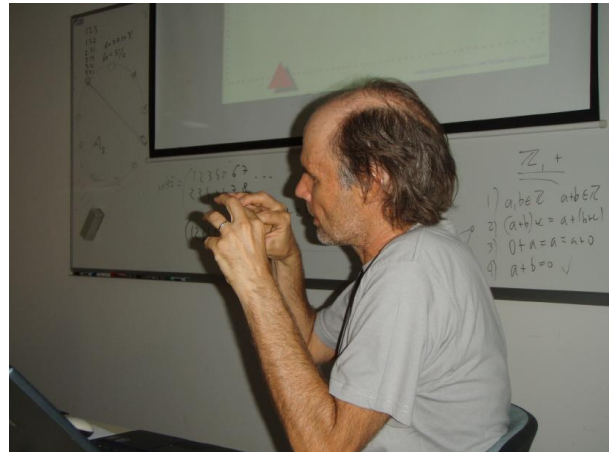
28. avgust 2007

Uvod v linearno algebro

28. avgust 2008

Racionalna in iracionalna števila: katerih je več?

O predavatelju: Prof. Peter Šemrl poučuje na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani in je mednarodno izjemno uveljavljen slovenski matematik, ki tudi aktivno sodeluje v uredniških odborih nekaterih najprestižnejših znanstvenih revij s področja linearne algebre in analize. Za svoje rezultate je prejel nekaj mednarodnih nagrad in leta 1996 tudi državno nagrado Republike Slovenije. Na MARSu smo se lahko večkrat prepričali, da zna s svojim energičnim in duhovitim nastopom ter pogledi na matematiko, študij in delo navdušiti tudi mlade.



Prof. dr. Dragan Marušič

Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije

27. avgust 2007

Hamiltonski cikli in poti v simetričnih grafih

Problem trgovskega potnika, ki želi po najkrajši poti obiskati vsa mesta na zemljevidu, v matematični teoriji grafov pogosto obravnavamo kot iskanje Hamiltonskih ciklov in poti. Predstavili bomo nekaj vprašanj v zvezi z njihovim obstojem v simetričnih grafih, ki so sicer razmeroma lahko razumljiva, pa kljub temu predstavljajo še nerešene izzive sodobnim matematikom.

O predavatelju: Prof. Dragan Marušič velja za vodilnega slovenskega raziskovalca na področju algebrske teorije grafov in permutacijskih grup, na katerem je z velikodušnim odnosom vzgojil tudi zelo uspešno skupino sodelavcev. Za svoje številne mednarodno odmevne rezultate je leta 2002 prejel Zoisovo nagrado, v zadnjih letih pa je bil aktiven pri ustanovitvi nove Fakultete za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije na Univerzi na Primorskem. Kot strasten matematik o lepoti matematike rad pripoveduje celo nematematikom.



Doc. dr. Štefko Miklavič

Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije

29. avgust 2007

Čez most po modrost - Eulerjev obhod grafa

S pomočjo znanega problema Koenigsberških mostov si bomo ogledali osnove teorije grafov ter poskusili odgovoriti na vprašanje, kateri grafi imajo Eulerjev obhod oziroma sprehod.

25. avgust 2008

Kode za odpravljanje napak

Večina od nas se je že srečala s kodami za zaznavanje napak, na primer pri črtni kodi. Tako imenovana kontrolna številka je črtni kodi dodana z namenom, da zazna (največ eno) napako v črtni kodi. Kode za odpravljanje napak so posplošitev kontrolnih številčk. Uporabljajo se ne samo za zaznavanje napak, ampak tudi za njihovo odpravljanje. Na predavanju bomo spoznali osnove teorije kod za odpravljanje napak.

O predavatelju: Štefko Miklavič je zelo uspešen predstavnik mlajše generacije slovenskih raziskovalcev v matematiki, ki se ukvarja predvsem s teorijo grafov in algebrasko kombinatoriko. Po diplomu s področja pedagoške matematike je doktoriral leta 2004 in se nato podoktorsko izpopolnjeval tudi v ZDA.



Dr. Maja Pohar Perme

Univerza v Ljubljani, Medicinska fakulteta, Inštitut za biomedicinsko statistiko

31. avgust 2007

Centralni limitni izrek in statistika v medicini

Statistika je matematična veda, ki je nepogrešljivo del raziskav v večini znanstvenih vej. Pogovarjali se bomo predvsem o njeni uporabi v medicini in si ogledali, kako sklepamo po statistično. Uvodnemu razmisleku vedno sledi kup računanja verjetnosti in tu nam še kako prav pride Centralni limitni izrek. Skušali bomo razumeti, kaj nam pove, katere predpostavke morajo biti izpolnjene ter kako ga lahko uporabimo na konkretnih primerih.

O predavateljici: Maja Pohar Perme je nekdanja vrhunška športnica (badminton) in udeleženka olimpijade leta 2000 v Sidneyu. Obenem je zmagovalka številnih državnih tekmovanj iz logike in razvedrilne matematike, ki je nadvse uspešno zaključila tudi študij uporabne matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Kot mlada raziskovalka na področju uporabe statistike v medicini je sodelovala z vrhunskimi znanstveniki iz Slovenije, Danske in Velike Britanije in v letu 2007 postala prvi doktorand na novem podiplomskem študiju statistike na Univerzi v Ljubljani.



Doc. dr. Klavdija Kutnar

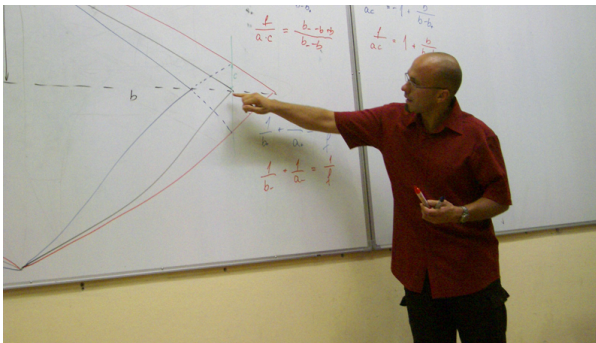
Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije

26. avgust 2008

Fulereni – kjer kemija sreča matematiko

Fulereni so poliedri s petkotnimi in šestkotnimi ploskvami, ki v kemiji predstavljajo ogljikove molekule s trivalentnim skeletom v obliki votle sfere ali cevki. Obstoj takih molekul so potrdili šele leta 1985, Robert F. Curl Jr., Harold W. Kroto in Richard E. Smalley pa so za to odkritje prejeli tudi Nobelovo nagrado. S pomočjo veje matematike, ki se imenuje teorija grafov, bomo preučili nekaj matematičnih lastnosti fulerenov in razložili, kaj nam le-te povedo o njihovih kemijskih lastnostih.

O predavateljici: Klavdija Kutnar je po uspešnem študiju na Pedagoški fakulteti v Ljubljani svojo raziskovalno kariero začela kot mlada raziskovalka. V letu 2008 je pod mentorstvom prof. Dragana Marušiča kot prva študentka Fakultete za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije v Kopru uspešno zagovarjala svojo doktorsko disertacijo, svoje rezultate pa je predstavila že na številnih mednarodnih konferencah. Jeseni 2008 bo začela s podoktorskim študijem na Ohio State University v ZDA.



As. dr. Primož Šparl

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

27. avgust 2008

Preštevanje s pomočjo grup

Nemalokdaj se srečamo z nalogo, ko je treba prešteti vse objekte, ki nas zanimajo. Če se vprašanje glasi: »Koliko je vseh različnih štirikrakah vetrnic s kraki rdeče ali rume barve?«, odgovor zlahka poiščemo z nekaj logičnega sklepanja. Če pa sprašujemo po številu šestnajstkrakah vetrnic s kraki sedmih različnih barv, je zadeva precej manj enostavna, v praksi pa so lahko tovrstni problemi še veliko bolj zapleteni. Na predavanju si bomo ogledali nekaj osnovnih rezultatov iz teorije permutacijskih grup, ki nam lahko pomagajo pri preštevanju objektov z določeno mero simetrije.

O predavatelju: Primož Šparl je diplomiral in leta 2008 tudi doktoriral na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Tudi on raziskovalno deluje v skupini dr. Marušiča na področju grafov in algebrske kombinatorike.

Jernej Filipčič

30. avgust 2006

Matematika in fotografija

O predavatelju: Jernej Filipčič je študiral astrofiziko na univerzi v Trstu, ob študiju pa se je veliko ukvarjal tudi z glasbo, fotografijo in gorskim kolesarstvom. Trenutno vodi svoje podjetje Fotosfera, ki ponuja številne inovativne fotografske storitve.

Seznam delavnic in drugih aktivnosti

MARS 2006 (30. 8. – 2. 9. 2006)

MARSovske delavnice

- mag. Boštjan Kuzman: **Geogebra**
- Uroš Kuzman: **Mathematica**
- Mojca Miklavc: **ConTeXt**
- Katja Berčič: **Priprava spletne strani projektov**

Zaključna predstavitev

MARS 2007 (27. 8. – 1. 9. 2007)

MARSovske delavnice

- mag. Boštjan Kuzman: **Geogebra 1**
- Primož Koželj: **Geogebra 2**
- Matjaž Kljun: **Omrežja 1**
- Nino Bašič: **L^AT_EX**
- Andrej Kramar: **Omrežja 2**
- Katja Berčič: **Priprava spletne strani projektov**
- **Obisk Centra eksperimentov Koper**

Predstavitve dijakov in študentov

- Tilen Marc, Dominik Šurc: **Ko bi stari Grki poznali dinamično geometrijo** (*predstavitev raziskovalne naloge*)
- Miha Čančula, Anja Komatar: **Reportaža z matematične olimpijade v Vietnamu 2007**
- Uroš Kuzman: **Reportaža z matematičnega tekmovanja študentov v Bolgariji 2007**

Organizirane družabne aktivnosti

- Peter Lendero: **Dobrodošli na MARS** (*spoznavni večer*)
- Katja Berčič: **Igra Go**
- Uroš Kuzman: **Kviz Male sive celice**

Zaključna predstavitev

Zimski MARS 2008

(22. 2. – 23. 2.)

- dr. Andrej Brodnik, dr. Dragan Marušič: **Predavanje Zakaj matematika in računalništvo**
- mag. Boštjan Kuzman: **MARSovski matematični laboratorij**
- Matjaž Kljun, Jernej Vičič: **MARSovski računalniški laboratorij**

MARS 2008 (24. 8. – 30. 8. 2008)

MARSovske delavnice

- mag. Boštjan Kuzman: **Izometrije**
- David Gajser: **Permutacije**
- Dejan Širaj: **Osnovno o grupah**
- mag. Boštjan Kuzman: **Geogebra 1 in 2**
- Tine Mezgec: **Osnove programiranja 1 in 2**
- Peter Lendero: **Zome konstrukcije**
- Gašper Zadnik: **Razvedrilna matematika**
- mag. Boštjan Kuzman: **Priprava projektov**
- Katja Berčič: **Priprava spletne strani projektov**
- Nino Bašič, Mojca Miklavc: **ConTeXt**
- **Obisk Centra eksperimentov**

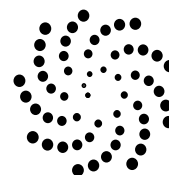
Predstavitve dijakov in študentov

- Aleksander Simonič: **Matematika starih civilizacij** (*predstavitev raz. naloge*)
- Peter Koželj, Jan Berčič, Nace Hudobivnik: **Mednarodna olimpijada v računalništvu Egipt 2008** (*fotoreportaža*)
- Matej Aleksandrov: **Mednarodna matematična olimpijada Španija 2008** (*fotoreportaža*)
- David Kraljič: **Mednarodna fizikalna olimpijada Vietnam 2008** (*fotoreportaža*)
- Boris Mitrovič: **Mednarodna olimpijada v lingvistiki, Bolgarija 2008**
- Jože Baša: **Voda v očeh** (*slovenski igrani film*)

Organizirane družabne aktivnosti

- Dejan Širaj: **Vzlet 2008** (*spoznavni večer*)
- Katja Berčič: **Igra Go**
- David Gajser: **Velika MARSovska avantura**

Zaključna predstavitev



MARS na SFZ (18. 9. 2008)

Predstavitev MARSovskih projektov na 14. slovenskem festivalu znanosti v Štihovi dvorani CD.

MARsovski projekti dijakov

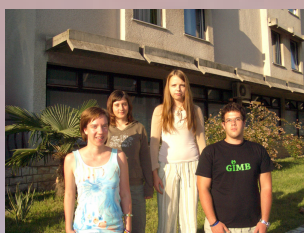
Priprava MARsovskih projektov je glavna naloga MARsovskih raziskovalcev. Dijaki o izbrani temi s pomočjo izhodiščnih vprašanj in literature napišejo krajši članek in izdelajo interaktivni spletni model, ki ga objavijo na spletni strani. Pri tem jim svetujejo mentorji, večinoma študentje. Projekte s plakati in v živo predstavijo na zaključni prireditvi.

2006



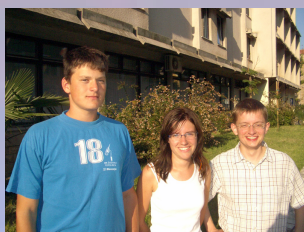
Prvi koraki v sferični geometriji

Miha Čančula, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Tilen Marc, Škofijska gimnazija Vipava
Dejan Širaj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Mentor: mag. Boštjan Kuzman, UL PeF



Košarka, zaporniki in teorija iger

Maja Alif, I. gimnazija v Celju
Nino Bašič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Maja Poklinek, Gimnazija Ravne na Koroškem
Mentorica: Katja Berčič, UL FMF



Finančna perspektiva podjetja Mars

Amela Rakanović, Gimnazija Srečka Kosovela Sežana
Ervin Strmčnik, Gimnazija Velenje
Mentor: mag. Boštjan Kuzman, UL PeF



Buffonova igla

Primož Koželj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Nejc Rosenstein, Gimnazija Lava Celje
David Kraljič, Gimnazija Velenje
Mentor: Uroš Kuzman, UL FMF



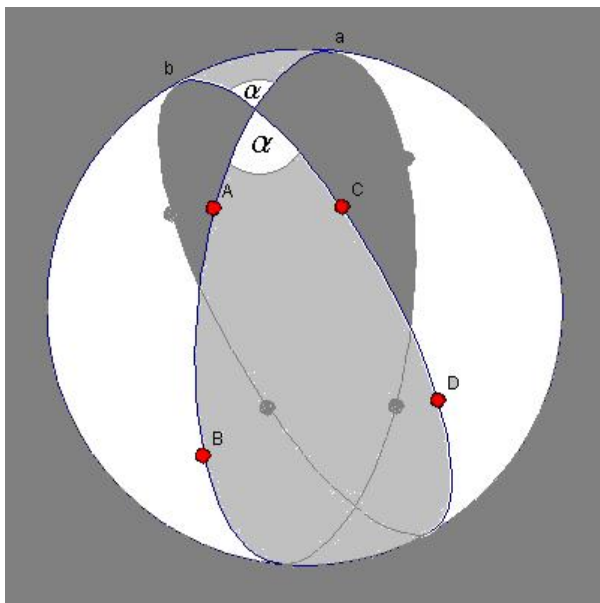
Met košarkarske žoge

Anže Starič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Dominik Šurc, Škofijska gimnazija Vipava
Tomo Umer, Gimnazija Koper
Mentor: Uroš Kuzman, UL FMF

Prvi koraki v sferični geometriji

Miha Čančula, Tilen Marc, Dejan Širaj, Boštjan Kuzman (mentor)

Kadar govorimo o geometriji, najprej pomislimo na ravninsko geometrijo. Zdi se nam povsem naravno, da je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka 180° . Pogosto pa se zgodi, da nam takšno razmišljanje ne zadostuje, ker se problemi ne pojavljajo na ravnini, temveč na površini krogle – sferi. Takrat potrebujemo drugačno, sferično geometrijo, v kateri je vsota notranjih kotov v trikotniku lahko večja od 180° . Znanje te veje geometrije je nepogrešljivo predvsem v kartografiji, geodeziji, navigaciji in astronomiji. V naslednjih vrsticah bomo skušali predstaviti nekaj najbolj osnovnih pojmov in zvez v sferični geometriji.



Na sfero lahko narišemo krožnice različnih velikosti, njihov polmer pa je navzgor omejen s polmerom sfere. Največjim krožnicam, ki jih lahko narišemo na sfero, pravimo glavne krožnice. Dobimo jih tako, da sfero presekamo z ravnino, ki gre skozi središče sfere.

Trikotniku na sferi, katerega stranice potekajo po glavnih krožnicah, pravimo sferični trikotnik. Stranice sferičnega trikotnika so zato krožni loki. Kot med dvema stranicama takšnega trikotnika je kot med tangentama na ti dve stranici skozi njuno presečišče (oglišče trikotnika). Za lažje računanje bomo vse kote podajali v radianih.

Med vsoto notranjih kotov in ploščino sferičnega trikotnika velja prav presenetljiva odvisnost, o kateri v ravninski geometriji ni niti sledu. Velja namreč izrek:

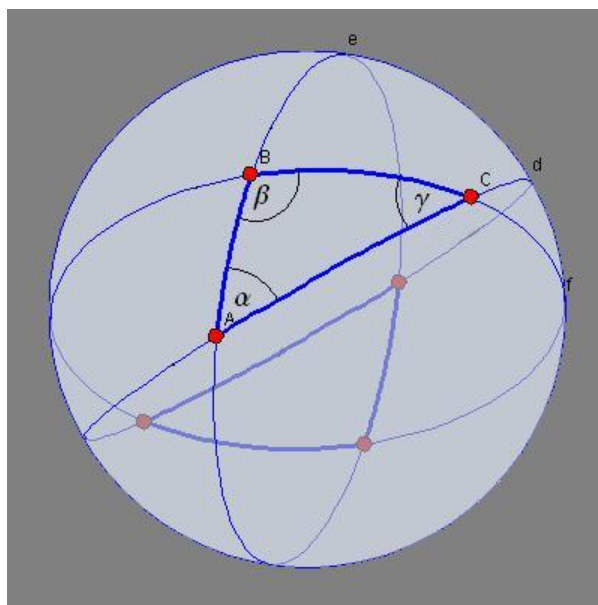
Izrek. Ploščina sferičnega trikotnika je odvisna le od vsote velikosti njegovih kotov in radija sfere. Natančneje:

$$P = r^2(S - \pi),$$

kjer je r radij sfere in $S = \alpha + \beta + \gamma$ vsota kotov v trikotniku.

Za izpeljavo te zveze moramo najprej izračunati površino dvojnega krajca. Dvojni krajec je del sfere, omejen z dvema glavnima krožnicama.

Kot α med tema dvema krožnicama je lahko največ π , takrat je površina dvojnega krajca enaka površini sfere, torej $4\pi r^2$. Ko pa je kot manjši, je tudi površina krajca sorazmerno manjša; recimo ko je $\alpha = \pi/5$, je površina krajca $(1/5)4\pi r^2 = \frac{4\pi r^2}{5}$. Sklepamo lahko, da je pri kotu α površina dvojnega krajca enaka $(\alpha/\pi)4\pi r^2 = 4\alpha r^2$.



Stranice trikotnika ABC z notranjimi koti α , β in γ podaljšamo okrog in okrog sfere. Na nasprotni strani sfere nastane trikotnik, ki je skladen s prvotnim. Dobimo tri dvojne krajce, ki vsebujejo oba

trikotnika. Tem trem krajcem pripadajo koti α , β in γ , zato njihove površine merijo $4\alpha r^2$, $4\beta r^2$ in $4\gamma r^2$.

Če jih pobarvamo, je pobarvana celotna sfera, oba trikotnika pa celo trikrat. Zato lahko rečemo, da je vsota površin vseh treh dvojnih krajev enaka površini celotne sfere, dvakratni ploščini trikotnika ABC in še dvakratni ploščini skladnega trikotnika.

Zapišemo lahko enačbo:

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 2P + 2P.$$

Po kratkem preurejanju dobimo želeno zvezo:

$$P = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

oziroma $P = r^2(S - \pi)$. □

Očitno je v primeru enotske sfere vsota notranjih

kotov v trikotniku ravno za π večja od njegove ploščine. Sicer pa ima pravkar dokazana zveza še več zanimivih posledic. Ena izmed njih je dejstvo, da podobnost trikotnikov, kot jo poznamo v ravninski geometriji, v sferični geometriji nima pomena. Vsi trikotniki na isti sferi s skladnimi koti so namreč skladni.

Viri

[1] Jeffrey R. Weeks, *Oblika prostora*, str. 90-97. DM-FA Slovenije, Ljubljana, 1999



Košarka, zaporniki in teorija iger

Maja Alif, Nino Bašič, Maja Poklinek, Katja Berčič (mentor)

Igre lahko postanejo zelo resna zadeva, če se jih lotijo matematiki. Ker pa je teorija iger danes že izjemno razvejana samostojna znanstvena disciplina, smo se mi lotili le dveh majhnih problemčkov. Najprej smo se seznanili s tako imenovano zapornikovo dilemo, nato pa smo poskusili na podoben način obravnavati še končnico košarkarske tekme.

Zapornikova dilema

Dveh zapornikov zaradi pomanjkanja dokazov ne morejo obtožiti na dolgo zaporno kazen, lahko pa bi ju, če bi eden pričal proti drugemu. Hkrati pa je tisti, ki zatoži drugega, izpuščen ali pa mu kazen zaradi sodelovanja znižajo.

Zapornikova dilema je znan problem iz teorije iger, pri kateri lahko igralca (zapornika) drug drugemu koristita oz. škodita z molkom ali obtožbo. Pri zapornikovi dilemi se odločamo samo med dvema možnostima: okoriščanje ali sodelovanje, pri čemer ne moremo natanko vedeti namena drugega zapornika. Obstaja več različic te dileme, pri klasični so izidi lahko sledeči:

Vsak želi čim bolj zmanjšati svojo kazen. S stališča posameznika se je bolje okoriščati, ker je kazen manjša, ne glede na odločitev drugega. Ker pa je tako najbrž razmišljal tudi drugi igralec, se zgodi, da drug drugega obtožita, za kar dobita 2 leti zapore, če pa bi molčala, bi dobila le pol leta.

Za oba skupaj bi bilo najugodnejše, če bi se dogovorila in molčala, vendar je to lahko tudi nevarno, če kateri od zapornikov ne drži besede in spregovori.

	B molči	B izda
A molči	oba dobita 6 mesecev	A dobi 10 let B je prost
A izda	A je prost B dobi 10 let	oba dobita 2 leti

Tabela 1 Zapornikova dilema

Košarkarska tekma

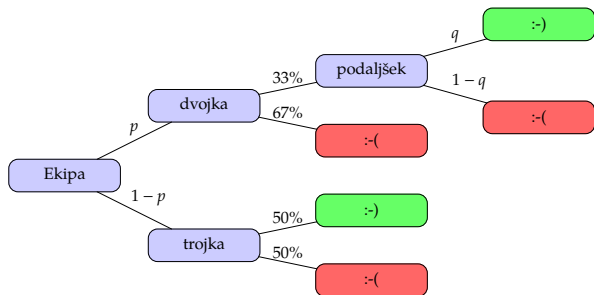
Košarkarska tekma se končuje. Žoga je v rokah domače ekipe, do konca pa je časa le za en napad. Gostje vodijo za dve točki. Domači so v dilemi: vreči dvojko, ter v primeru zadetka igrati podaljšek, v katerem zmagata ni zagotovljena, ali pa streljati trojko, pri kateri v primeru zadetka sledi takojšnja zmagata. Ker pa je treba upoštevati dejstvo, da je trojko težje zadeti kot dvojko, se znajdejo v dilemi.

V dilemi pa so tudi nasprotniki. Gostje morajo vnaprej predvideti, kakšno taktiko bodo najverjetneje uporabili gostitelji. Trener si ne sme privoščiti, da bi v igrah uporabljal vedno isto taktiko, saj ima v tem primeru nasprotnik prelahko nalogo pri izbiranju strategije za obrambo.

Poglejmo torej, kako pogosto naj se domači odločijo za neko taktiko napada in kolikokrat naj nasprotnik uporabi določeno taktiko obrambe.

napad \ obramba	dvojka	trojka
dvojka	33%	70%
trojka	50%	15%

Tabela 2 Verjetnost uspeha domačih glede na odigrano obrambo



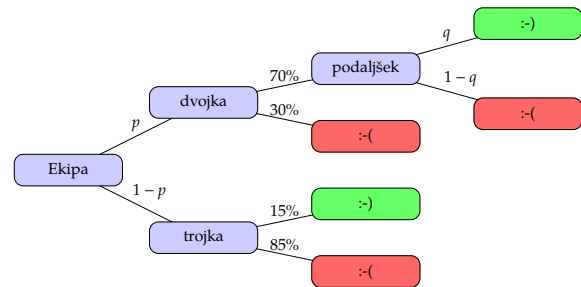
Slika 1 Obramba za dvojko

Naj bo p verjetnost, da bomo metali dvojko, $1-p$ pa verjetnost, da bomo metali trojko. Bodi q verjetnost, da bomo podaljšek dobili, če se seveda tja sploh uvrstimo (pri nas velja $q = 0.5$). Če naši nasprotniki branijo dvojko, potem je možnost za zmago:

$$v_2(p) = 0.33 \cdot q \cdot p + 0.50 \cdot (1 - p) \quad (1)$$

Če pa branijo trojko, potem je možnost za zmago:

$$v_3(p) = 0.70 \cdot q \cdot p + 0.15 \cdot (1 - p) \quad (2)$$



Slika 2 Obramba za trojko

Sedaj pri vsakem p upoštevamo za nas najmanj ugoden izkupiček:

$$\min(v_2(p), v_3(p)). \quad (3)$$

Sedaj pa poiščimo tak p , pri katerem bo najneugodnejša rešitev čimboljša. Iščejo maksimum funkcije (3), ta pa je pri $p = 0.654206$. Ta rezultat pove trenerju, naj se v 65% primerih odloči za dvojko, v 35% primerih pa za trojko.

Če tak izračun naredimo še za trenerja ekipe v prednosti, ugotovimo, da je najbolje v 63% primerih odigrati obrambo dvojke, v 37% primerih pa obrambo trojke.

Viri

- [1] L. E. Sadovski and A. L. Sadovski, *Matematika in šport*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1990
- [2] *Game Theory*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu <http://faculty.haas.berkeley.edu/rjmorgan>



Finančna perspektiva podjetja Mars

Amela Rakanović, Ervin Strmčnik, Boštjan Kuzman (mentor)

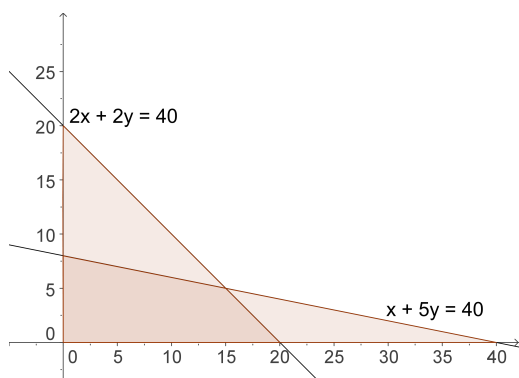
V podjetju MARS d.o.o. izdelujejo marsovce in marsovke. Pri izdelavi uporabljajo vilice in žlice. Za obdelavo enega marsovca je potrebno eno uro dela z vilico in dve uri dela z žlico, za marsovko pa pet ur dela z vilico in dve uri dela z žlico. Njihovi kupci so pripravljani plačati 1€ za vsakega marsovca in 3€ za vsako marsovko. Žal imajo v podjetju samo eno vilico in žlico, njihov delovni čas pa je omejen na 40 delovnih ur tedensko. Koliko marsovok in marsovcev naj izdelajo vsak teden, da bo njihov zaslužek največji?

Nalogo lahko prevedemo iz marsovskega v matematični jezik. S spremenljivko x označimo število v enem tednu izdelanih marsovcev, s spremenljivko y pa število izdelanih marsovok. Za čas obdelave z vilico mora veljati $x + 5y \leq 40$, za čas obdelave z žlico pa $2x + 2y \leq 40$. Tedenski iztržek pri navedenih cenah bo enak $i = x + 3y$.

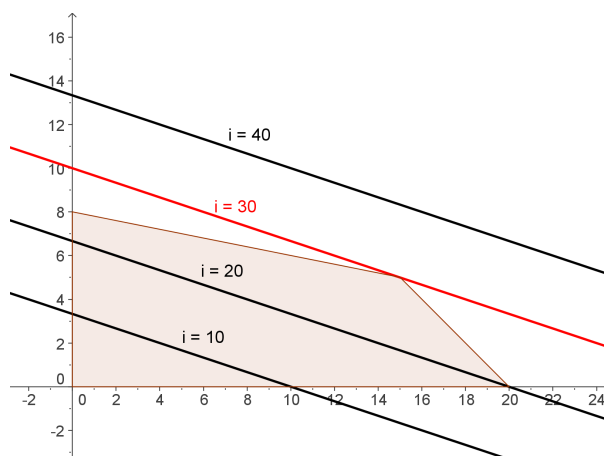
Iščemo torej maksimum funkcije $i = x + 3y$ pri pogojih

$$x + 5y \leq 40, \quad 2x + 2y \leq 40, \quad x, y \geq 0.$$

Vsaka od naštetih neenačb predstavlja neko polravnino, ki si jo lahko predstavljamo kot območje nad ali pod ustrezno premico. Območje, ki ustreza vsem neenačbam, je na naslednji sliki najtemneje osenčeno.



Funkcija $i = x + 3y$, ki predstavlja izkupiček, lahko v splošnem zavzame različne vrednosti. Območje, kjer je njena vrednost konstantna, pa si lahko predstavljamo kot premico z enačbo $x + 3y = i$ in jo narišemo za nekaj vrednosti i , na primer $i = 10, 20, 30, 40, \dots$



Na ta način lahko iz slike razberemo, da največja vrednost za i , pri kateri ustrezna premica še seka osenčeno območje, nastopi v točki, kjer se sekata premici $x + 5y = 40$ in $2x + 2y = 40$. To se zgodi v točki $(15, 5)$, kjer je vrednost i enaka 30. Podjetju MARS se torej najbolj splača izdelati 15 marsovcev in 5 marsovok na teden; z njimi bodo zaslužili 30€.

Bistvo naloge, ki smo jo pravkar rešili, je bilo poiskati maksimum neke *linearne* funkcije na območju, ki ga določa sistem linearnih neenačb. Reševanje tovrstnih problemov spada v skupino matematičnih metod, ki jih imenujemo *linearno programiranje*. V našem problemu sta nastopali le dve neznaniki, zato smo problem zlahka ugnali z geometrijskim razmislekom. Že pri treh neznanikah pa postane podobna naloga zelo zahtevna.

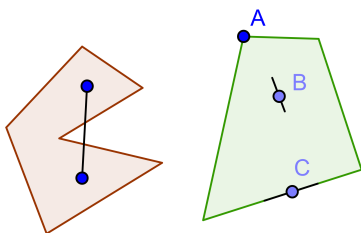
Eno prvih učinkovitih metod za reševanje tovrstnih problemov s poljubnim številom neznank in neenačb je razvil George Dantzig in je znana pod imenom *metoda simpleksov*. Kasneje so razvili še druge hitrejše in učinkovitejše algoritme, še danes pa v zvezi z linearnim programiranjem obstaja nekaj nerešenih vprašanj.

Seveda so omenjene metode za našo obravnavo tukaj prezahtevne, zato si oglejmo le nekaj preprostejših matematičnih konceptov, ki so potrebni za njihovo razumevanje.

Množico točk M v ravnini \mathbb{R}^2 imenujemo *konveksna*, če za poljubni točki iz te množice velja, da

celotna daljica, ki ju povezuje, leži znotraj množice. Točko v konveksni množici M imenujemo *vogalna točka*, če ne leži na nobeni odprti daljici, vsebovani v M .

Od obeh množic na spodnji sliki je konveksna le desna. Označena točka A je njena vogalna točka, točki B in C pa nista vogalni, saj ležita v notranjosti neke daljice, vsebovane v M .



Očitno velja, da je presek dveh konveksnih množic zopet konveksna množica, saj za poljubni točki iz preseka velja, da daljica, ki ju povezuje, leži tako v prvi kot v drugi množici. Ker je vsaka polravnina konveksna množica, bo območje možnih rešitev sistema neenačb v nalogah linearnega programiranja z dvema neznankama vedno konveksna množica.

ca. Dokazati je mogoče, da v primeru, ko opazovana linearna funkcija zavzame ekstrem znotraj neke konveksne množice, ta ekstrem zavzame tudi v eni od njenih vogalnih točk. Zato bi bilo v takem primeru dovolj določiti vogalne točke in preveriti, v kateri od njih je vrednost funkcije največja oziroma najmanjša.

Tovrstno razmišljanje je osnova tudi za reševanje nalog s tremi ali več neznankami, ki pa so v praksi le redkokdaj rešljive brez uporabe zahtevnejših metod in računalnika.

Viri

- [1] Dušan Hvalica, *Linearno programiranje in njegova uporaba*. Založba Ekonomska Fakulteta, Ljubljana, 2002
- [2] *Linear programming*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_Programming

Buffonova igla

Primož Koželj, Nejc Rosenstein, David Kraljič, Uroš Kuzman (mentor)

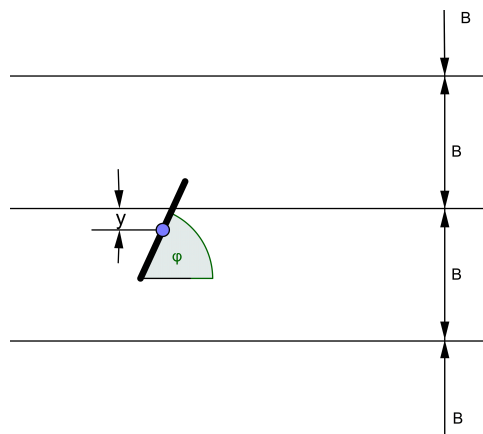
Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1701-1788) je bil francoski matematik, biolog, kozmolog in pisatelj. V sredini 18. stoletja je opisal in rešil problem, ki ga danes poznamo kot problem Buffonove igle. Problem je zastavljen takole: na ravnino, na kateri se nahaja neskončno število vzporednic, ki so med seboj oddaljene za razdaljo B , naključno vržemo iglo dolžine $L \leq B$. Kolikšna je verjetnost, da se bo igla dotikala katere od vzporednic?

Na sliki y označuje razdaljo med središčem igle in med najbližjo črto. Kot, ki ga igla oklepa s črto, pa je označen s φ . Ker mečemo na slepo, to seveda pomeni, da vsaka razdalja y ter vsak kot φ nastopata z enako verjetnostjo ter da sta drug od drugega neodvisna.

Če si pri reševanju pomagamo z grafičnim prikazom, ugotovimo, da se bo igla dotaknila črte, ko bo

$$y < \frac{L}{2} \sin \varphi.$$

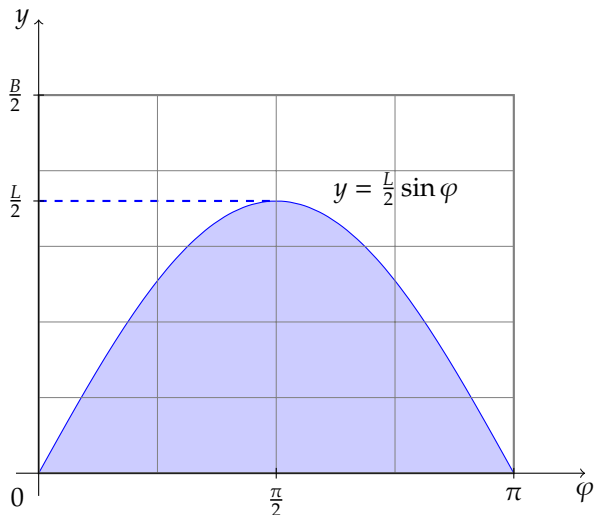
Parameter y lahko zavzame katerokoli vrednost



med 0 in $L/2$, kot φ pa lahko meri med 0° in 180° oziroma med 0 in π radianov:

$$0 < y < \frac{L}{2}, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Oglejmo si pravokotnik na naslednji sliki. Pri vsakem metu neodvisni spremenljivki y in φ določata neko točko znotraj pravokotnika s stranicama π in $B/2$.



Kot smo že ugotovili, se bo igla dotaknila črte, ko bo veljalo $y < \frac{L}{2} \sin \varphi$, zato je na sliki narisana krivulja $y = \frac{L}{2} \sin \varphi$. Za vse točke pod krivuljo se je igla dotaknila črte, kar označimo za uspešen poskus, točke nad krivuljo pa predstavljajo zgrešen poskus.

Verjetnost uspeha P je torej kvocient med ploščino področja pod krivuljo, ki ga določajo uspešni izidi, in ploščino celotnega pravokotnika. Ploščina področja uspešnih poskusov meri

$$A_s = \int_0^{\pi} \frac{L}{2} \sin \varphi \, d\varphi = L,$$

ploščina pravokotnika pa je $A = \pi \frac{B}{2}$. Od tod sledi, da je verjetnost, da zadenemo črto, enaka

$$P = \frac{A_s}{A} = \frac{L}{\pi \frac{B}{2}} = \frac{2L}{\pi B}.$$

V posebnem primeru, ko je $L = B$, je

$$P = \frac{2}{\pi} \approx 0,63662.$$

Vedoželjni bralec lahko ta rezultat sam preveri tudi eksperimentalno, če le ima dovolj časa.

V babičini skrinji poiščite šivanke in na veliko polo papirja narišite vzporedne črte. Razmak med njimi naj bo enak dolžini šivanke. Nato na polo mečite šivanke ter si zapisujete število uspešnih in vseh poskusov. Po približno 10.000 ponovitvah boste dobili že kar dober približek za zgoraj izračunani rezultat.

Še bolj zabavno pa je, da lahko na ta način izračunamo približek števila π , saj iz prej izpeljane formule sledi

$$\pi = \frac{2L}{B} \frac{1}{P}.$$

Uporabno natančnost sicer dosežemo šele z izredno veliko poskusi. Lahko pa imamo srečo kot italijanski matematik Mario Lazzarini, ki je izvedel poskus z iglo leta 1901. Iglo naj bi vrgel 3408-krat ter dobil znan in zelo dober približek $\pi = 355/113$.

V praksi lahko danes take eksperimente zamenjamo z računalniško simulacijo in jih tako pospešimo. Problem Buffonove igle je preprost primer simulacije tipa Monte Carlo, s kakršnimi se simulira obnašanje številnih fizikalnih in matematičnih sistemov.

Viri

- [1] Robert. B. Banks, *Ledene gore, padajoče domine in druge prigode iz uporabne matematike*. DMFA Slovenije, Ljubljana, 2004
- [2] Georges-Louis Leclerc, *Comte de Buffon*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Georges-Louis_Leclerc,_Comte_de_Buffon
- [3] *Monte Carlo method*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method

Met košarkarske žoge

Anže Starič, Dominik Šurc, Tomo Umer, Uroš Kuzman (mentor)

Fiziko in matematiko je človek uporabljal že od prazgodovine. Žal se pri preprostem lučanju kamenja in sulic ni zavedal, kaj vse se skriva za preprostim gibom. Iz preučevanja tega giba se je skozi tisočletja razvila balistika. Že v rimskem času so morali vedeti, kakšen domet imajo katapulti. V večini primerov je torej balistika povezana z orožjem. V našem projektu pa se bomo osredotočili na šport, ki ga je leta 1891 izumil James Naismith. Zastavili smo si problem meta na koš. Imamo košarkaša, ki stoji na črti za izvajanje prostih metov. Znana je njegova višina, začetna hitrost, s katero mora vreči žogo, višina koša in razdalja, s katere se izvajajo prosti meti. Naš cilj je določiti kot, pod katerim je potrebno vreči žogo.

Navpični met

Za reševanje težjega problema si bomo najprej ogledali model navpičnega meta, pri katerem se naš objekt giblje premočrtno. Denimo, da žogo zalučamo navpično navzgor. Edina sila, ki deluje na naš objekt, je gravitacijska sila. Uporabimo drugi Newtonov zakon o gibanju in dobimo enačbo $-F_g = ma$. Ugotovimo, da je pospešek žoge a konstantno enak $-g$ (negativen predznak dodamo zato, ker je pospešek v nasprotni smeri gibanja), torej gre za enakomerno pospešeno gibanje. Znani sta nam enačbi:

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (2)$$

v pomeni hitrost, v_0 začetno hitrost, t čas, s pot, in s_0 začetno pot. S pomočjo enačb izračunamo maksimalno višino $H = v_0^2/2g$.

Poševni met

Sedaj bomo problem zastavili tako, da žogo vržemo v poševni smeri pod kotom α z začetno hitrostjo. Hitrost razstavimo na navpično in vodoravno komponento. S pomočjo enačbe (2) in enačbe za premo enakomerno gibanje $s = vt$ dobimo pozicijo središča žoge

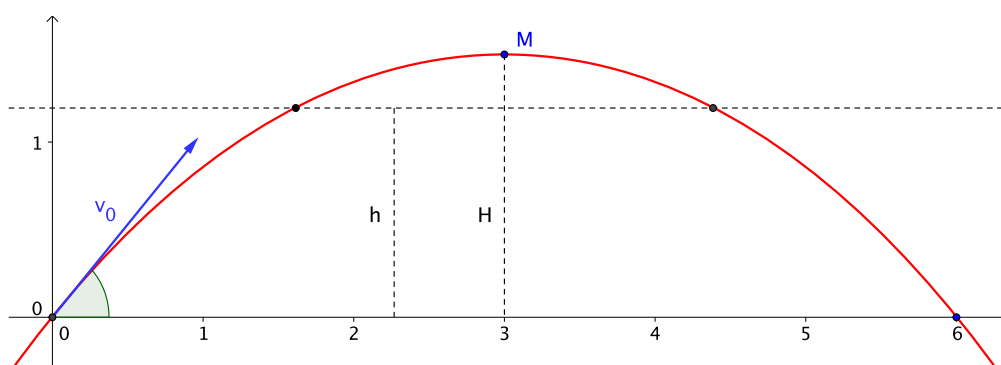
$$T\left(v_0 t \cos \alpha, v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}\right) \quad (3)$$

v odvisnosti od časa. Če iz abscise izrazimo čas in ga vstavimo v ordinato, dobimo zvezo:

$$y = (\tan \alpha) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) x^2 \quad (4)$$

Iz enačbe je razvidno, da se telo giblje po paraboli. Najvišjo točko leta izračunamo s pomočjo enačbe za absciso temena parabole in ugotovitve iz razdelka 7.1:

$$M\left(\frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha, v_0^2 \sin^2 \alpha\right) \quad (5)$$



Slika 3 Skica tirnice žoge pri poševnem metu

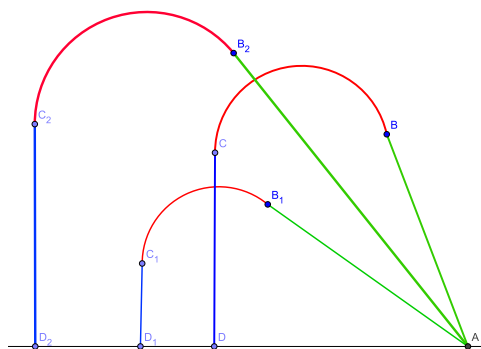
Pri metu košarkarske žoge je cilj praviloma višje od točke izmeta.

Iz slike je razvidno, da parabola seka vodoravno premico višine koša v dveh točkah. Če se torej vrnemo k prvotnemu problemu meta na koš, sta

ob začetnih podatkih možni dve krivulji leta in s tem dva kota. Ena rešitev ne pride v poštev, saj bi se žoga približala obroču s spodnje strani. Želimo, da žoga prileti skozi koš, ko je že dosegla maksimalno višino. Z uporabo zveze in enačbe 4 dobimo končno formulo za izračun kota:

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gl} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{g}{v_0^2} (2h - \frac{gl^2}{v_0^2})} \right)$$

Ker je tangens naraščajoča funkcija in mi želimo večjega izmed kotov, izberemo seštevanje.



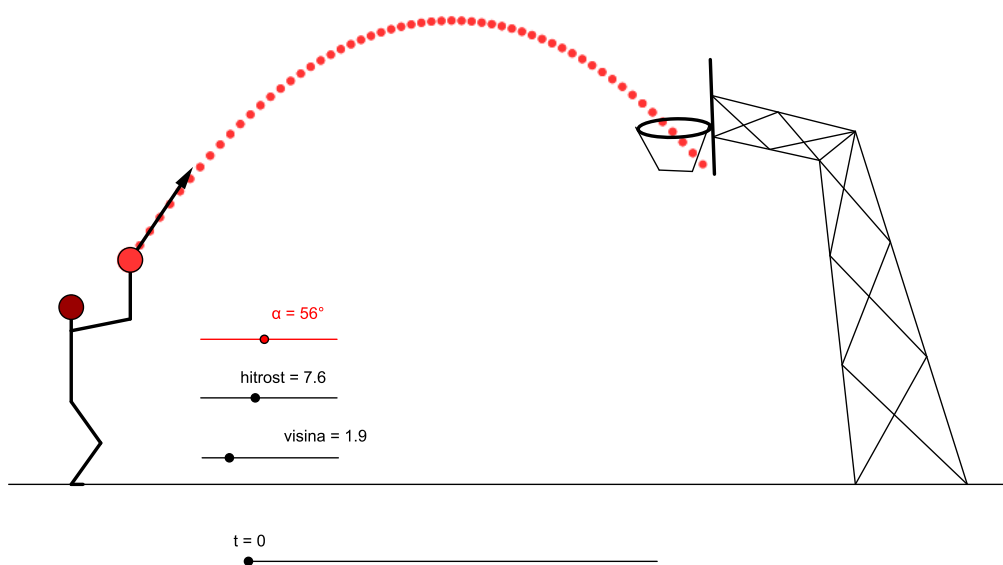
Slika 4 Tartaglijeve tirnice

Zanimivost

Niccolo Tartaglia je še leta 1550 v knjigi Nova znanost zagotavljal, da se telo pri poševnem metu giblje po nagnjeni premici, po delu kroga in po navpični premici. Leta 1638 je G. Galilei pokazal, da se pri vodoravnem metu telo giblje po paraboli.

Viri

- [1] Robert. B. Banks, *Ledene gore, padajoče domine – 2. del*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 2005
- [2] Janez Strnad, *Razvoj fizike*. DZS, Ljubljana, 1996



2007



Najhitrejša pot po Marsu

Maja Alif, I. Gimnazija v Celju
Blaž Peterlin, Tehniška gimnazija, ŠC Novo mesto
Nejc Rosenstein, Gimnazija Lava, Celje
Mentor: mag. Boštjan Kuzman, UL PeF



Nemogoče razporeditve, poliedri, ploščine in Eulerjeva formula

Miha Čančula, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Peter Muršič, Gimnazija Koper
Maja Poklinek, Gimnazija Ravne na Koroškem
Mentor: Primož Koželj, UL FMF



Marsovi sateliti in cikloidne krivulje

Anja Komatar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Tilen Marc, Škofijska gimnazija Vipava
Matej Aleksandrov, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Mentor: Peter Lendero, UL FMF



Stožnice v taksi razdalji

Amela Rakanović, SŠ Srečka Kosovela Sežana
Boris Mitrović, Tehniška gimnazija Sevnica, ŠC Krško
Dominik Šurc, Škofijska gimnazija Vipava
Mentorica: Katja Berčič, UL FMF



Bézierjeve krivulje

Polona Durcik, SŠ Srečka Kosovela Sežana
David Kraljič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Aljaž Zalar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Mentor: Uroš Kuzman, UL FMF



Optimalna dostava goriva in Fermatova točka

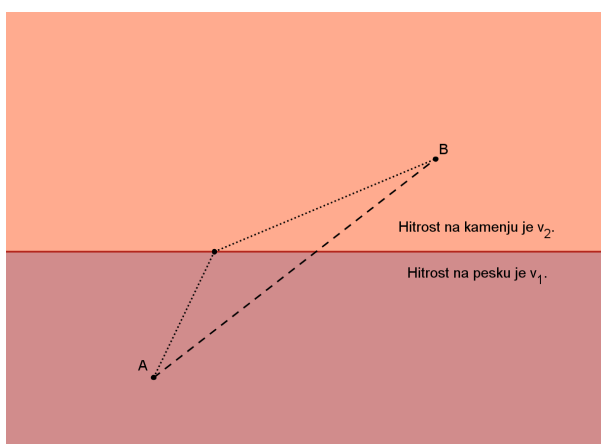
Matej Drame, Gimnazija Lava, Celje
Peter Koželj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Mentor: Nino Bašič, UL FMF

Najhitrejša pot po Marsu

Maja Alif, Blaž Peterlin, Nejc Rosenstein, Boštjan Kuzman (mentor)

Naloga

Neustrašni raziskovalci na Marsu se ubadajo z naslednjim problemom: *Vozilo na površju se giblje po peščinem območju s hitrostjo v_1 , po kamniti podlagi pa s hitrostjo v_2 . Denimo, da želimo priti od točke A v peščinem območju do točke B na kamniti podlagi, pri čemer sta območji razmejeni s premico (Slika 5). Kakšno pot naj izberemo, da bomo zanjo porabili čim manj časa?*



Slika 5 Točka A leži v peščinem območju, kjer vozilo potuje s hitrostjo v_1 , točka B pa v kamnitem območju, kjer vozilo potuje s hitrostjo v_2 .

Najkrajša pot med točkama A in B je daljica, kar pa še ne pomeni, da bomo zanjo porabili najmanj časa. Če je potovanje po peščinem območju počasnejše od potovanja po kamniti podlagi, bomo pot raje ubrali tako, da se na peščinem območju ne bomo zadržali predolgo. Našo pot bomo zato sestavili iz dveh daljic, ki točki A in B povezujeta s točko H , ki leži na mejni premici. A kako določiti točko H , da bo porabljeni čas res najkrajši?

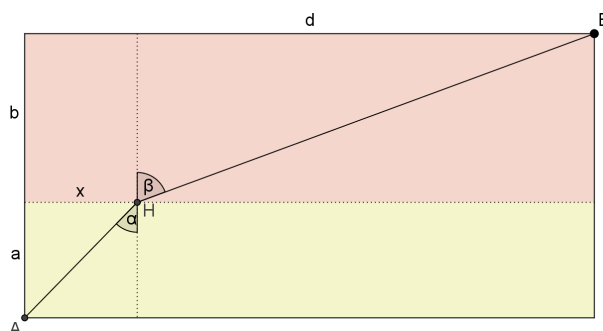
Pot vozila in lom svetlobe

Pot do rešitve naše naloge ni lahka in spotoma bomo morali zaviti celo v fiziko, natančneje v optiko. Dobro desetletje po odkritju daljnogleda je leta 1621 nizozemski matematik Willebrord Snell¹ odkril lomni zakon, ki pravi, da je razmerje med hitrostima svetlobe v različnih snoveh enako razmerju sinusov vpadnega in lomnega kota:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Čeprav zakon v bistvu opisuje lom žarka svetlobe, je veljaven tudi splošneje in ga lahko uporabimo pri reševanju našega problema, ki spada v področje mehanike.

Označimo z a in b širini ustreznih območij, z d njegovo dolžino in z x razdaljo iskane točke H od levega roba območja (Slika 6).



Slika 6 Skica k splošno zastavljenemu problemu

V skladu s Pitagorovim izrekom lahko iz lomnega zakona dobimo enakost:

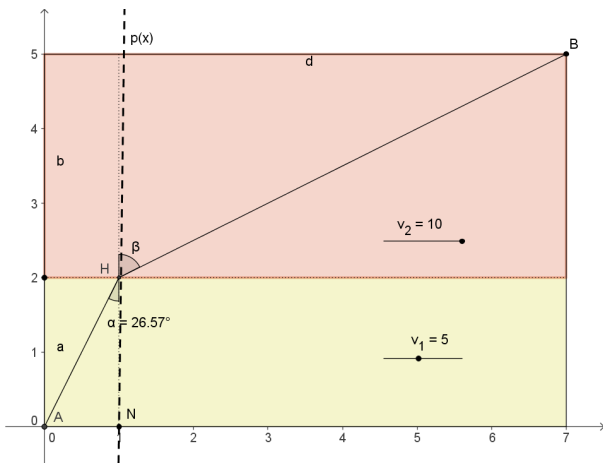
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

¹ Willebrord Snell van Royen (1580-1626), nizozemski matematik, fizik in astronom. Po študiju prava je nasledil svojega očeta kot predavatelj matematike na Univerzi v Leidnu. Med drugim je izmeril poldnevniški lok med Alkmaarom in Bergenom, razvil postopek triangulacije in odkril lomni zakon svetlobe.

Če označimo $\frac{v_1}{v_2} = c$, potem po kvadriranju in preurejanju dobimo enakost

$$x^2(b^2 + (d-x)^2) - c^2(a^2 + x^2)(d-x)^2 = 0.$$

Izraz na levi je polinom četrte stopnje, ki ga lahko označimo s $p(x)$. Vrednost x , ki jo iščemo, je ničla tega polinoma na intervalu $(0, d)$. Da taka ničla gotovo obstaja, lahko ugotovimo po kratkem premisleku. Velja namreč $p(0) = -c^2a^2d^2$, ki je vedno negativno število. Po drugi strani pa je $p(d) = d^2b^2$ v vsakem primeru pozitivno število, torej mora graf polinoma $p(x)$ vsaj enkrat sekati koordinatno os na intervalu $(0, d)$. To pomeni, da imamo na tem intervalu vsaj eno ničlo. Da bi se prepričali, da je ničla le ena sama, bi potrebovali diferencialni račun, a se bomo natančnemu odgovoru na tem mestu izognili.

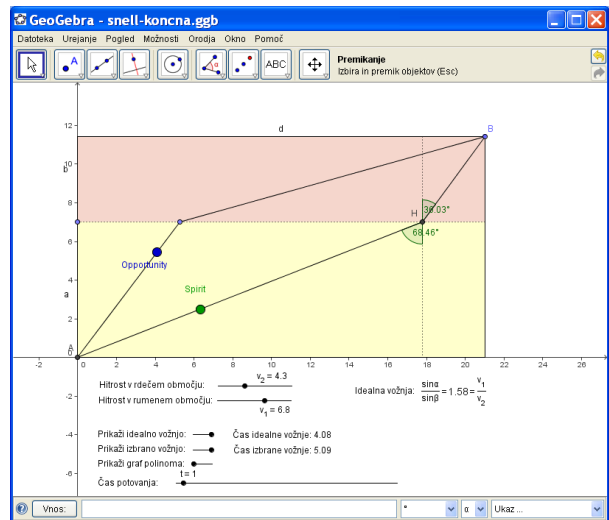


Slika 7 Točka N na sliki je iskana ničla polinoma $p(x)$, ki je hkrati tudi x koordinata iskane točke loma H .

Preizkusimo našo rešitev na konkretnih podatkih. Naj bo $a = 2$, $b = 3$, $d = 7$, hitrost vozila na kamnih pa je dvakrat večja od hitrosti vozila na pesku. V tem primeru iščemo ničlo polinoma $p(x) = 3x^4 - 42x^3 + 179x^2 + 56x - 196$ na intervalu $(0, 7)$. To lahko preuredimo v $(x-1)(3x^3 - 39x^2 + 140x + 196) = 0$, kar nam že da eno ustrezno rešitev $x = 1$. V tem primeru lahko tudi hitro vidimo, da je ničla ena sama, saj je $p'(x) = 3x^2 - 39x + 140$, kar je večje od 0 za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Računalniški model

Ker je v splošnem težko najti ničle polinoma $p(x)$, smo se nadaljnega reševanja lotili z računalnikom. S pomočjo programa GeoGebra smo izdelali interaktivni model, s katerim lahko pri poljubno izbranih začetnih podatkih (začetna in končna točka potovanja, hitrost na pesku in hitrost na kamenju) izračunamo ničlo prej omenjenega polinoma in ilustriramo položaj iskane točke loma. Izdelali smo tudi animacijo, ki prikazuje gibanje dveh točk, ene po poljubno izbrani lomljeni poti in druge, ki potuje po optimalni lomljeni poti (Slika 8).



Slika 8 Podatki in izračuni v izdelanem modelu se dinamično spreminjajo s premikanjem ustreznih drsnikov. Animacija nas tudi vizualno prepriča, da sonda Spirit, ki se pomika po optimalni poti, točko B doseže prej ali vsaj tako hitro kot sonda Opportunity, ki se premika po poljubni drugi poti.

Narava ubere najkrajšo pot

Ideja o lomnem zakonu se je v prvi polovici 17. stoletja najprej porodila Snellu in nato Descartesu, a je ni nihče od njiju pravilno razložil. Descartes² je celo menil, da svetloba lažje potuje v gostejših kot v redkejših snoveh. Približno 40 let kasneje pa je znameniti francoski matematik Pierre de Fermat³ v pismu markizu De la Chambreu je zapisal: *Da*

² René Descartes (1596-1650), francoski filozof, matematik, fizik, učenjak in častnik. Najbolj znano delo je Razprava o metodi za boljše vodenje razuma in iskanje resnice v znanosti (1637) z dodatki o optiki in geometriji.

³ Pierre S. de Fermat (1601-1665), francoski pravnik, matematik in fizik. Postavil Fermatovo načelo, po katerem svetloba pri lomu ali odboju potuje med dvema točkama tako, da za pot porabi najkrajši čas. Iz načela izpeljemo odbojni in lomni zakon svetlobe.

bi se izognili omenjenim neprijetnostim in poskusili poiskati pravi razlog za lom, sem vam v svojem pismu namignil, da bi z upoštevanjem znanega in utemeljenega načela, da gre narava vedno po najkrajši poti, lahko enostavno prišli do rezultata. Tako je Fermat pravilno razložil ta naravni zakon, njegovo načelo pa je postalo znano pod imenom 'de maximis et minimis'. Očitno podobni naravni zakoni veljajo tudi na Marsu.

Viri

1. Petković, M. (1988). Zanimljivi matematički problemi. Beograd: Naučna knjiga
2. Michel Guillemon, et. al. (2000.). Zgodovina matematike, zgodbe o problemih. Ljubljana: DMFA - založništvo

3. FERMAT. Online. Citirano 31. avgusta 2007 na naslovu 1; <http://sl.wikipedia.org/wiki/Fermat>
4. DESCARTES. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu <http://sl.wikipedia.org/wiki/Descartes>
5. WILLEBRORD SNELL. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu http://sl.wikipedia.org/wiki/Willebrord_Snell_van_Royen
6. SNELL'S LAW. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Snell%27s_law



Nemogoče razporeditve, poliedri, ploščine in Eulerjeva formula

Miha Čančula, Peter Muršič, Maja Poklinek, Primož Koželj (mentor)

Naloga

Področje marsovske gore Olympus Mons znanstveniki raziskujejo s tremi daljinsko vodenimi vozili. Vsako od njih je preko žic povezano s tremi statičnimi raziskovalnimi postajami. Ker morebitno prekrivanje žic povzroča motnje v signalu, bi radi vozila, postaje in žice razporedili tako, da se ne bi nobeni dve žici križali. Ali je taka razporeditev mogoča?

Pri iskanju odgovora na to vprašanje si lahko nekoliko nepričakovano pomagamo z Eulerjevo formulo, ki povezuje število robov, ploskev in oglišč konveksnega poliedra. Kot je bralec najverjetneje že uganil, Eulerjeva formula ne velja le za poliedre, njena splošna veljavnost pa je vredna še toliko več zaradi njene uporabnosti. Oglejmo si torej preprost dokaz in nekaj primerov uporabe.

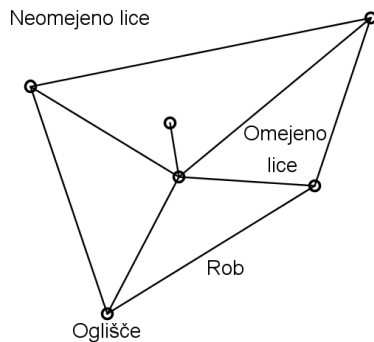
Ravninski grafi in Eulerjeva formula

V matematični teoriji grafov je *graf* objekt, ki ga sestavljata množica točk in množica povezav med njimi. Povedano zelo preprosto, graf dobimo, če v ravnini označimo nekaj točk in nekatere izmed njih povežemo. Točke bomo imenovali *oglišča grafa*, povezave pa *robovi grafa*. Graf imenujemo *povezan*, če se lahko od poljubnega oglišča po nekem zaporedju robov sprehodimo do poljubnega drugega oglišča v grafu.

Grafe, ki jih lahko narišemo tako, da se robovi med sabo ne sekajo (razen morda v ogliščih), imenujemo *ravninski grafi*. Robovi ravninskega grafa razdelijo ravnino na več delov, ki jih imenujemo *lica*. Eno lice je vedno neskončno, ostala pa so omejena.

Število lic, robov in oglišč povezanega ravnin-

⁴ Leonhard Euler (1707-1783), izjemni švicarski matematik in fizik, po katerem je poimenovanih mnogo pojmov v matematiki (npr. Eulerjeva konstanta, Eulerjev sprehod). Pod izrazom Eulerjeva formula poznamo tudi Eulerjevo formulo za kompleksna števila $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, zato formulo $O - R - P = 2$ za konveksne poliedre včasih raje imenujemo Eulerjev izrek za poliedre.



Slika 9 Primer povezanega ravninskega grafa

skega grafa povezuje *Eulerjeva formula*⁴, ki se s slovenskimi oznakami glasi $O - R + P = 2$, kjer je O število oglišč, R število robov in P število lic grafa (oznako P smo izbrali zaradi uporabe istih oznak pri poliedrih - P kot ploskve).

Eulerjevo formulo bomo dokazali tako, da si bomo najprej ogledali graf z enim samim ogliščem in mu nato dodajali oglišča in robove. Začetni graf z enim ogliščem (glej sliko 10) ima 1 oglišče, 1 lice (neskončno namreč) in 0 robov, zato je $O - R + P = 1 - 0 + 1 = 2$ in za ta graf Eulerjeva formula velja.

V vsakem naslednjem koraku pa se odločimo za eno izmed naslednjih dveh možnosti:

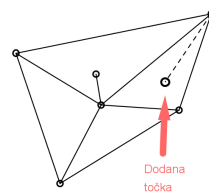
- Dodamo novo oglišče in rob od tega oglišča do nekega obstoječega oglišča (primer na sliki 11). Pri tem se število robov in število oglišč povečata za 1, število lic pa se ne spremeni, zato tudi vrednost izraza $O - R + P$ ostane nespremenjena.
- Dodamo rob med dvema različnima obstoječima ogliščima (slika 12, levo) ali pa zanko - povezavo nekega oglišča s samim seboj (slika 12, desno). Pri tem se povečata število robov in lic za 1, število oglišč se pa ne spremeni. Zato vrednost $O - R + P$ ponovno ostane nespremenjena.

Neravninska grafa K_5 in $K_{3,3}$

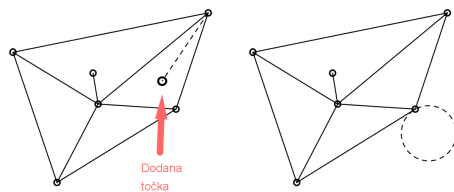
Sedaj, ko poznamo Eulerjevo formulo, vemo dovolj, da se spopademo z začetnim problemom in drugim problemom, ki mu je precej podoben. Preden pa začnemo z obravnavo, problema še enkrat predstavimo.



Slika 10 Ena sama točka; $O = 1$, ker je oglišče eno samo; velja tudi $P = 1$, ker štejemo tudi neskončno ploskev, ki obdaja točko



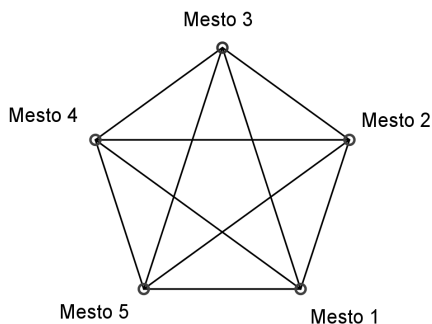
Slika 11 Dodajanje oglišča in povezave do njega



Slika 12 Levo - Dodajanje povezave med obstoječima točkama; Desno - V posebnem primeru je to kar dodajanje zanke

Graf z oznako K_5 imenujemo *poln graf na petih točkah*. To je graf s petimi oglišči, pri katerem je vsako oglišče povezano z vsemi ostalimi. Primer takega grafa dobimo, če bi želeli pet mest povezati s cestami tako, da bi bil vsak par mest povezan z lastno cesto. Vprašanje, ali se da ceste zgraditi na takšen način, da ni potreben nadvoz, podvoz ali križišče, je enakovredno vprašanju, ali je graf K_5 ravninski.

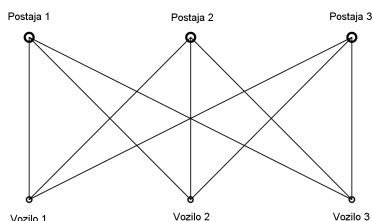
Graf z oznako $K_{3,3}$ pa imenujemo *poln dvodelni graf* z dvema skupinama po tri oglišča. Oglišča v njem so povezana tako, da je vsako oglišče iz posamezne skupine povezano z vsemi oglišči v drugi skupini in z nobenim ogliščem iz svoje skupine. Tudi v naši uvodni nalogi z vozili imamo dve skupini predmetov (vozila in postaje), predmete vsake skupine pa smo povezali z vsemi predmeti iz dru-



Slika 13 Pet mest in ceste med njimi so primer grafa K_5

ge skupine. Če vozila in postaje interpretiramo kot oglišča grafa, je naša uvodna naloga tako evivalentna vprašanju, ali je graf $K_{3,3}$ ravninski.

S pomočjo Eulerjeve formule bomo pokazali, da nobeden izmed dveh omenjenih grafov ni ravninski. To pomeni, da sta obe zastavljeni nalogi nerešljivi.



Slika 14 Naš primer grafa $K_{3,3}$

Dokaz za graf K_5

Dokazovali bomo s pomočjo protislovja. Predpostavili bomo namreč, da je graf K_5 ravninski, nato z logičnim sklepanjem prišli do protislovja in od tod sklepali, da je bila napačna začetna predpostavka. To pa bo pomenilo, da preučevani graf ni ravninski.

Definirajmo torej *stopnjo lica* kot število robov tega lica. Vsota stopenj vseh lic enostavnega grafa je enaka dvakratniku števila robov ($2R$), saj vsak rob pripada dvema licema. Zdaj poiščimo še eno oceno za vsoto stopenj lic in primerjajmo ti dve oceni. V grafu K_5 ni ne dveh robov med posameznim parom točk ne zank (povezav oglišča s samim seboj), zato moramo pri vsakem prehodu, po katerem spet pridemo v začetno točko, prehoditi vsaj tri robove (po istem robu pri prehodu ne smemo iti večkrat). Ko se na ta način sprehodimo okoli lica, vidimo, da

ima vsako lice vsaj tri robove, zato je vsota stopenj lic večja ali enaka $3P$. Upoštevamo še ugotovitev od prej in imamo torej neenakost $3P \leq 2R$.

Preučimo razmerje med $3P$ in $2R$ še iz drugega zornega kota. Graf K_5 ima 5 oglišč in $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ robov (lahko jih tudi preštejemo na sliki 13). Ker smo predpostavili, da je ta graf ravninski, mora zanj veljati Eulerjeva formula, iz katere lahko izračunamo število ploskev $P = R - O + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$. Potem je $3P = 21 > 20 = 2R$ in tako $3P > 2R$. Dobljeno protislovje ($3P \leq 2R$ in $3P > 2R$) pomeni, da graf ni ravninski.

Dokaz za graf $K_{3,3}$

Za graf $K_{3,3}$ moramo neenakost, ki vključuje število lic in robov nekoliko spremeniti. Še vedno velja, da graf nima ne dvojnih povezav ne zank, zato ne obstajajo lica s stopnjo strogo manjšo od tri. Ta ugotovitev pa v primeru grafa $K_{3,3}$ še ne pripelje do protislovja. Na srečo pa jo lahko še izboljšamo - pri grafu $K_{3,3}$ namreč celo velja, da nobeno lice nima stopnje tri.

Sprehodimo se okoli lica grafa. Vsaka točka je povezana zgolj s točkami iz druge skupine, zato pri prehodu dolžine 3 nikoli ne končamo v začetni skupini - prehodimo npr. skupina $A \rightarrow$ skupina $B \rightarrow$ skupina $A \rightarrow$ skupina B ; začeli smo v A , končali v B . Ker ne končamo v začetni skupini, ne moremo končati v začetni točki. To je možno šele po prehodu dolžine 4 ali več, zato je najmanjša možna stopnja lica 4.

Vsak rob v vsakem grafu pripada dvema licema, zato zopet velja, da je vsota stopenj lic $2R$. Stopnja posameznega lica je večja ali enaka 4, zato je vsota stopenj večja ali enaka $4P$. Torej velja neenakost $4P \leq 2R$ oziroma $2P \leq R$.

Še na drug način: Graf $K_{3,3}$ ima 6 oglišč in 9 robov (glej sliko 14). Če spet privzamemo, da je graf ravninski, po Eulerjevi formuli dobimo $P = 9 - 6 + 2 = 5$. Spet smo v protislovju z prej ugotovljenim, saj je $2P = 10 > 9 = R$ oziroma $2P > R$, od prej pa imamo oceno $2R \leq P$. Predpostavka, da je $K_{3,3}$ ravninski, nas je tako privedla do protislovja, zato je napačna.

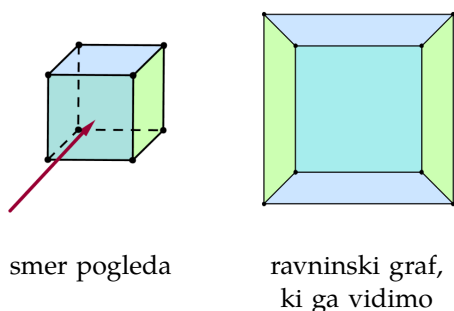
S tem smo dokazali, da niti grafa K_5 niti grafa $K_{3,3}$ ne moremo narisati v ravnini, ne da bi se vsaj dva robova križala. Ko to uporabimo na prej

navedenih primerih iz resničnega življenja, ugotovimo, da ne moremo medsebojno povezati petih mest brez nadvozov, podvozov ali križišč ter da raziskovalnih vozil ne moremo povezati z antenami brez križanja kablov. Nemogoče je torej, da bi našli takšno razporeditev predmetov in povezav, ne glede na to koliko zvijamo žice ali preusmerjamo ceste.

Od grafov v ravnini do poliedrov

Preden se lotimo poliedrov, se domenimo, da se bomo ukvarjali le s *konveksnimi poliedri*, to je tistimi, ki nimajo votlin ali vdrtin.

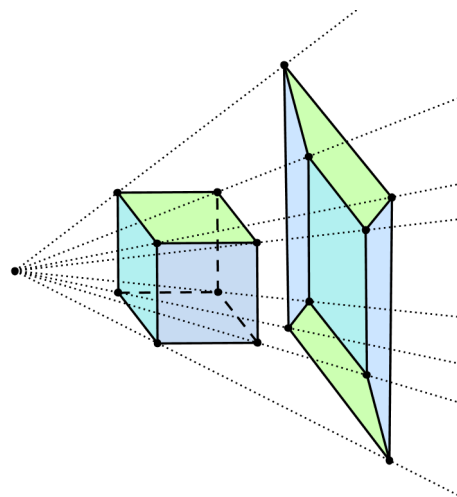
Ravninski graf, ki ustreza konveksnemu poliedru, dobimo tako, da naš pogled počasi približamo enemu izmed lic poliedra (glej sliko 15). Polieder si pri tem predstavljamo kot žičnat model - vsa snov, iz katere je polieder, je prozorna, vidni pa so le žičnati robovi. Ko smo torej dovolj blizu, vidimo celoten polieder znotraj robov tistega lica, ki smo se mu približali, robovi pa se ne sekajo drugje kot v ogliščih - vidimo torej ravninski graf (slika 15, desno).



Slika 15 Približevanje kocki s pogledom.

Druga možnost, da poiščemo ustrezen ravninski graf pa je, da za polieder postavimo ravnino, pred njega pa svetilo. Na naš zaslon oziroma ravnino tako projiciramo sence robov poliedra. Svetilo neki ploskvi približujemo toliko časa, da se sence robov na ravnini ne križajo več. Senca celotnega poliedra, ki smo jo dobili na ravnini, je ustrezen ravninski graf (glej sliko 16). Takšno projekcijo imenujemo *stereografska projekcija*.

Dobljeni ravninski graf ima podobne lastnosti kot prvotni polieder - ima enako število robov, oglišč in lic oziroma ploskev kot prvotni polieder, če štejemo tudi neskončno lice grafa. Enako število oglišč nam zagotovi dejstvo, da se oglišče poliedra



Slika 16 Stereografska projekcija kocke

projecira v oglišče grafa. Enako velja za robove in vse ploskve poliedra razen tisto, ki je najbližje svetilu oziroma gledalcu. Ta najbližja ploskev se preslika v lik, ki pokriva celotno območje grafa, to pa praviloma ne ustreza nobenemu posameznemu licu grafa. To težavo odpravimo tako, da štejemo, da se najbližja ploskev preslika v zunanje, neskončno lice.

Zaradi podobnih lastnosti velja enaka povezava med številom ploskev, robov in oglišč poliedra kot med številom lic, robov in oglišč povezanega ravninskega grafa - enostavneje povedano, s pomočjo projekcije smo pokazali, da velja Eulerjeva formula tudi za poliedre.

O pravih poliedrih

Pravilni poliedri so tisti konveksni poliedri, katerih ploskve so skladni pravilni mnogokotniki in pri katerih se v vsakem oglišču stika enako število robov (in s tem enako št. ploskev). Med njimi sta denimo vsem znana tetraeder in kocka, pa morda manj znani oktaeder, ikozaeder in dodekaeder (glej sliko 17), ki so jih poznali že stari Grki. Ob naštetih petih primerih platonskih teles, kot jih tudi imenujemo, se nam zagotovo porodi zanimivo vprašanje, ali obstaja še kakšen drug pravilni polieder in koliko je vseh takih teles.

Naj bo neki pravilni polieder sestavljen iz b -kotnikov, od katerih se jih a stika v vsakem oglišču. Poleg Eulerjeve formule $O - R + P = 2$ za njegova oglišča, robove in ploskve velja še

$$R = \frac{bP}{2} \text{ in } O = \frac{bP}{a}.$$

Prva zveza velja, ker imamo P lic, vsako ima b robov, vsak rob pa pripada dvema licema (z dva moramo torej deliti, da robov ne štejemo prevečkrat). Druga velja, ker imamo spet P lic s po b oglišči, vsako oglišče pa pripada a licem. Če ti dve zvezi vstavimo v Eulerjevo formulo, dobimo

$$O - R + P = P \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{2} + 1 \right) = 2,$$

kar lahko preoblikujemo v

$$P = \frac{4a}{2a - ab + 2b}.$$

Števili P in a sta pozitivni, zato mora veljati $2a - ab + 2b > 0$ oziroma $2(a+b) > ab$, iz česar po deljenju z $2ab$ sledi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}.$$

Vemo pa tudi, da je število b večje ali enako 3, saj imajo vsi mnogokotniki vsaj 3 oglišča. Tudi a je večji ali enak 3, ker se v vsakem oglišču stikajo vsaj trije robovi. Ker je a večji ali enak 3, je $\frac{1}{a}$ največ $\frac{1}{3}$. Vidimo, da mora biti b manjši ali enak 5, če naj še velja

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}.$$

Podobno lahko sklepamo še za zamenjana a in b . Po krajšem premisleku nam tako ostane le 5 parov naravnih števil (a, b) , ki zadoščajo pogoju

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}.$$

Ti pari so $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$.

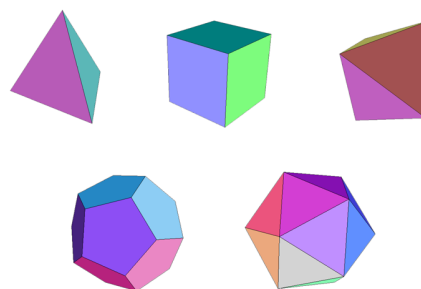
Iz zgornjih formul lahko za vsak par (a, b) izračunamo P, O in R , saj velja

$$P = \frac{4a}{2a - ab + 2b}, \quad O = \frac{bP}{a}, \quad R = \frac{bP}{2}.$$

Tako dobimo podatke za pet možnih pravih poliedrov, ki so zbrani v tabeli 3. Vsa ta telesa obstajajo, kar dokazujejo modeli - glej sliko 17. Drugih pravih poliedrov pa ni, sicer pridemo v protislovje z Eulerjevo formulo.

a	b	P	O	R	polieder
3	3	4	4	6	tetraeder
3	4	6	8	12	kocka
3	5	12	20	30	dodekaeder
4	3	8	6	12	oktaeder
5	3	20	12	30	ikozaeder

Tabela 3 Vrednosti P, O in R za vseh 5 parov (a, b)



Slika 17 Pet pravih poliedrov: tetraeder, kocka (heksaeder), oktaeder, dodekaeder in ikozaeder. (Slike narejene s pomočjo programa JavaView, ki omogoča vizualizacijo 3D objektov. Modeli teles so vzeti iz primerov programa. Glej: <http://www.javaview.de/>)

Ploščine in Pickova formula

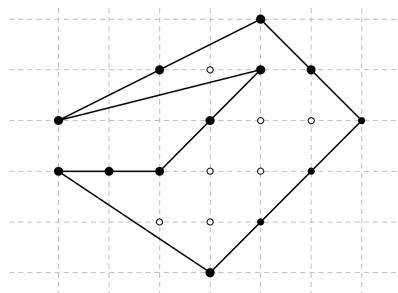
S pomočjo Eulerjeve formule se lahko lotimo še enega zanimivega matematičnega problema. Kadar se ukvarjamo z večkotniki, katerih oglišča imajo celoštevilske koordinate, imamo na izbiro preprosto formulo za izračun ploščine. Ta formula se imenuje Pickova formula⁵ in se glasi:

$$S = O_{\text{znotraj}} + \frac{1}{2} O_{\text{rob}} - 1,$$

kjer je S ploščina lika, O_{znotraj} število točk v notranosti lika, O_{rob} pa število točk na robu. Najbolj zanimivo pri tej formuli je, da je ploščina lika odvisna le od števila točk s celoštevilskimi koordinatami v notranosti in na robovih večkotnika, ni pa neposredno odvisna od oblike lika.

Pokažimo, kako z nekaj koraki iz Eulerjeve for-

⁵ George Alexander Pick je formulo prvi opisal leta 1899. Velja tudi posplošitev formule na večkotnike z luknjami $S = L + O_{\text{znotraj}} + \frac{1}{2} O_{\text{rob}} - 1$, kjer je L število lukenj v večkotniku; luknje se ne dotikajo med sabo ali z robom večkotnika, tudi točke, ki so na robu lukenj štejemo kot robne točke.

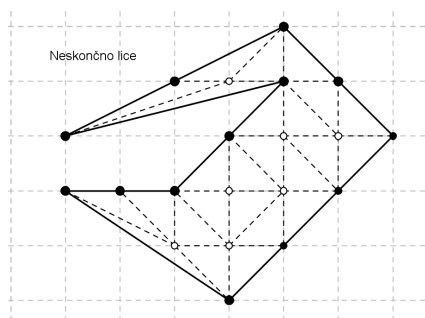


Slika 18 V notranjosti je 7 točk, na robu pa 13. Ploščina večkotnika je torej $S = O_{znotraj} + \frac{1}{2}O_{rob} - 1 = 7 + \frac{13}{2} - 1 = 12,5$

mule izpeljemo Pickovo. Točke s celoštevilskimi koordinatami, na primer $(4, 3)$, imenujmo kar *celoštevilske točke*. Trikotnik z oglišči v celoštevilskih točkah, ki ne vsebuje nobene celoštevilске točke razen oglišč, pa imenujmo *enostaven trikotnik*. V naši izpeljavi bomo uporabili naslednji ugotovitvi o enostavnih trikotnikih, katerih dokaza pa bomo tukaj izpustili:

- Vsak enostaven trikotnik ima ploščino $\frac{1}{2}$.
- Vsak poljuben večkotnik lahko razrežemo na same enostavne trikotnike.

Bralec ju lahko poskuša dokazati sam, mi pa se lotimo kar dokazovanja izreka. Najprej razrežimo naš poljubno izbran večkotnik na enostavne trikotnike (glej sliko 19). Nato si ta razrez večkotnika (z vsemi novimi robovi in oglišči) ogledimo še kot ravninski graf. Imamo pravzaprav ravninski graf s P lici. Število trikotnikov, na katere smo razrezali večkotnik, je enako $P - 1$. To število je za ena manjše od P , ker razrez vsebuje poleg $P - 1$ trikotnikov še neskončno lice, ki obkroža večkotnik (glej sliko 19).



Slika 19 Razrez večkotnika na enostavne trikotnike. Dobljeni graf ima 26 lic, in sicer 25 enostavnih trikotnikov in eno neskončno lice.

Vsak trikotnik ima natanko tri stranice. Torej je skupno število stranic trikotnikov v grafu $3(P - 1)$.⁶ Po drugi strani lahko skupno število stranic preštejemo, tako da številu stranic trikotnikov na robu večkotnika prištejemo število stranic trikotnikov v notranjosti večkotnika. Vsak notranji rob pripada kot stranica dvema enostavnima trikotnikoma, vsak zunanji rob pa je stranica samo enemu enostavnemu trikotniku. Zato lahko zapišemo, da je

$$3(P - 1) = 2R_{notranji} + R_{zunanji}.$$

Vsak rob je bodisi notranji bodisi zunanji, zato velja $R = R_{notranji} + R_{zunanji}$. To vstavimo in dobimo:

$$3(P - 1) = 2R - R_{zunanji}$$

Prenesemo vse razen P na desno stran:

$$P = -2P + 3 + 2R - R_{zunanji} = 2(R - P) + 3 - R_{zunanji}.$$

Po Eulerjevi formuli vemo da velja $O + P - R = 2$, kar lahko preoblikujemo v $R - P = O - 2$. Opazimo še, da je število zunanjih robov večkotnika enako številu robnih točk, torej $R_{zunanji} = O_{rob}$ in dobimo

$$P = 2(O - 2) + 3 - O_{rob}.$$

Zdaj pa zares izrazimo še ploščino. Vemo, da je ploščina večkotnika enaka vsoti ploščin enostavnih trikotnikov. Enostavnih trikotnikov je $P - 1$, njihova ploščina pa je $\frac{1}{2}$, zato velja $S = \frac{1}{2}(P - 1)$. Vstavimo prej dobljeni izraz za P :

$$S = \frac{1}{2}(2(O - 2) + 3 - O_{rob} - 1) = O - \frac{1}{2}O_{rob} - 1.$$

Vemo, da je število vseh oglišč enako vsoti števil oglišč v notranjosti in oglišč na robu večkotnika, $O = O_{znotraj} + O_{rob}$, od tod pa:

$$S = O_{znotraj} + O_{rob} - \frac{1}{2}O_{rob} - 1 = O_{znotraj} + \frac{1}{2}O_{rob} - 1.$$

S tem smo izpeljali in dokazali Pickovo formulo.

Zaključek

Videli smo, da Eulerjeva formula ni uporabna le pri ravninskih grafih, ampak lahko z njeno uporabo elegantno rešimo številne zanimive in na prvi pogled nesorodne probleme. Naši raziskovalci Marsa pa bodo morali drugače načrtovati svoja raziskovalna vozila in postaje, saj lahko z Eulerjevo formulo le dokažemo, da pri trenutni zasnovi vozil in postaj željena razporeditev ne obstaja.

⁶ Tudi če se dve stranici trikotnikov na sliki prekrivata, ju štejemo kot dve. Število stranic torej ni nujno enako številu robov.

Med drugim lahko z Eulerjevo formulo pokažemo, da bodo morali naši raziskovalci Marsa izdelati drugačen načrt za svoja raziskovalna vozila in postaje, saj pri trenutni zasnovi razporeditev brez prekrivajočih se žic ne obstaja.

Viri

1. Coxeter, H. S. M. (cop. 1989). Introduction to Geometry. New York [etc.]: J. Wiley & Sons.
2. Wilson, Robin J. (1997). Uvod v teorijo grafov. Ljubljana: DMFA Slovenije.
3. Aigner, Martin (1998). Proofs from the book. Berlin [etc.]: Springer.

4. Berele, Allan (cop. 2001). Geometry: theorems and constructions. Upper Saddle River: Prentice Hall.
5. Lavrič, Boris. Večkotniki na kvadratni mreži. Presek, letnik 32 (2004/2005), št. 2-3.
6. Bronštejn, Il'ja Nikolaevič (1997). Matematični priročnik. Ljubljana : Tehniška založba Slovenije.
7. JavaView Homepage. Online. Citirano 16. septembra 2007 na naslovu <http://www.javaview.de/>

Marsovi sateliti in cikloidne krivulje

Anja Komatar, Tilen Marc, Matej Aleksandrov, Peter Lendero (mentor)

Uvod

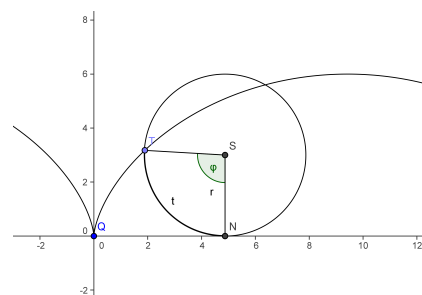
Na področju Aurorae Sinus se znanstveniki ukvarjamo s sateliti. Še posebej nas zanima najdražji satelit Talcum, ki kroži okoli Marsove lune Fobos. Ker želimo vsak trenutek vedeti, kje se satelit nahaja, bomo skušali poiskati njegov tir in v matematičnem jeziku opisati ustrezno krivuljo.

Definicije in enačbe

Krivuljo, ki jo točka na krožnici opiše pri kotaljenju po nekem objektu (ravnini, krožnici, drugi cikloidi, ...), imenujemo *cikloidna krivulja*. Nekatere zanimive vrste cikloid imajo svoja imena. Našo pozornost so pritegnile cikloida, epicikloida, hipocikloida in asteroida. *Cikloida* je krivulja, ki jo opiše točka na krožnici pri kotaljenju po ravnini, epicikloida in hipocikloida pa nastaneta, če eno krožnico kotalimo po drugi. Pri tem *epicikloido* dobimo s kotaljenjem na zunanji strani, *hipocikloido* pa s kotaljenjem po notranji strani druge krožnice.

Enačbe cikloid se najlepše napišejo v parametrični obliki. To pomeni, da vrednosti na ordinatni osi y ne izrazimo kot funkcijo vrednosti na abscisi x , temveč tako x kot y izrazimo kot funkciji neke druge spremenljivke. Oglejmo si izpeljavo ustreznih enačb.

Cikloida



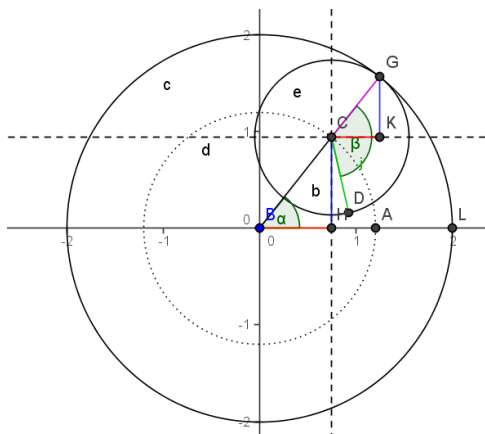
Slika 20 Skica nastanka cikloide

Krožnica s polmerom r in središčem S se kotali po zgornji strani osi x v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy . Na začetku je točka $Q(0,0)$ stičišče krožnice in osi x . Ko se krožnica zakotali za kot φ , ki ga merimo v radianih, točka Q preide v točko $T(x,y)$, novo dotikališče pa nastane v točki $N(r\varphi, 0)$. Tedaj dobimo, da ima točka T koordinate:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi)$$

$$y = r(1 - \cos \varphi)$$

Pri opisu hipocikloide bomo uporabili oznake s skice 21. Postavimo koordinatno izhodišče v središče krožnic s polmerom R . To bo krožnica, po kateri se bo kotalila druga s polmerom r . Na drugi krožnici smo izbrali točko D in opisali njeno gibanje. Za začetek naj C leži na pozitivnem poltraku realne osi, D pa naj bo dotikališče obeh krožnic,



Slika 21 Skica nastanka hipocikloide

ki sovpada z L . Po kratkem premisleku ugotovimo, da se bo središče druge krožnice gibalo po krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom $(R - r)$. Ker imamo opravka s krožnicami, bomo vse opisovali s polarnimi koordinatami. Enačba točke C je torej

$$c = (R - r)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Opazimo, da bi nam koristilo, če bi prestavili koordinatno izhodišče v točko C . S premislekom ugotovimo, da se točka G , ki je dotikališče obeh krožnic v dani poziciji, giblje po krožnici s središčem v C in polmerom r . Ker sta osi novega koordinatnega središča vzporedni originalnima, je tudi kot med premico CG in osjo x enak α . Torej je njena enačba

$$g = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Ker se druga krožnica kotali po prvi, sta loka GD in GL enako dolga. Po formuli za krožni lok $l = r\alpha$ (če označujemo kote v radianih) izračunamo kot β med polmeroma CG in CD in dobimo $\beta = \frac{R\alpha}{r}$. Ker bomo razmerje $\frac{r}{R}$ potrebovali še kasneje, ga označimo z m .

Opazimo, da lahko D dobimo tako, da zavrtimo G okoli C za kot $-\beta$. To naredimo tako, da pomnožimo vektor G z vektorjem s kotom $-\beta$ in dolžino 1 in po Moirovi formuli dobimo:

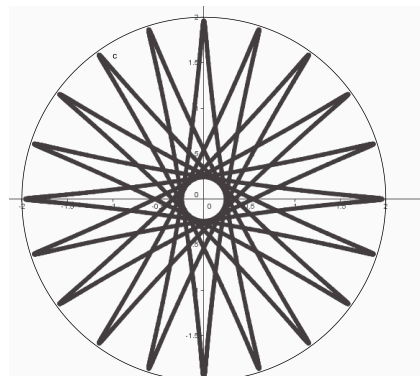
$$\begin{aligned} d &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos -\beta + i \sin -\beta) \\ &= r\left(\cos \alpha \left(1 - \frac{1}{m}\right) + i \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) \end{aligned}$$

Sedaj ugotovimo, da lahko seštejemo vektorja C glede na izhodišče in D glede na izhodišče v C in tako dobimo parametrično enačbo za D :

$$x = Rm \cos\left(\alpha\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) + R(1 - m) \cos \alpha$$

$$y = Rm \sin\left(\alpha\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) + R(1 - m) \sin \alpha$$

V tem izrazu nastopa parameter m , ki je enak razmerju med polmerom notranje in polmerom zunanje krožnice, torej je vedno manjši ali enak 1. Z izbiranjem različnih vrednosti tega parametra dobimo različne oblike hipocikloid.



Slika 22 Primer hipocikloide

Ko smo z računalniškim programom GeoGebra narisali nekaj hipocikloid pri različnih vrednostih parametra m , smo opazili, da je hipocikloida pri izbrani vrednosti m enaka hipocikloidi pri vrednosti $1 - m$. Ker se nam je to zdelo zelo zanimivo, smo se o stvari pozanimali in odkrili, da je ta ugotovitev že znana in se imenuje Izrek o dvojnem generiranju, katerega dokaz prepuščamo nadebudnemu bralcu.

Epicikloida

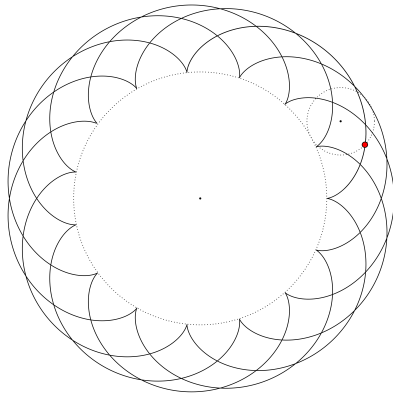
Izpeljava enačbe za epicikloido je zelo podobna, zato zapišimo le njeno končno parametrično obliko. Od enačbe za hipocikloido se razlikuje le v tem, da parameter m v njej nastopa z nasprotnim predznakom: $-m$.

$$x = -Rm \cos\left(\alpha\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) + R(1 + m) \cos \alpha$$

$$y = -Rm \sin\left(\alpha\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) + R(1 + m) \sin \alpha$$

Primeri

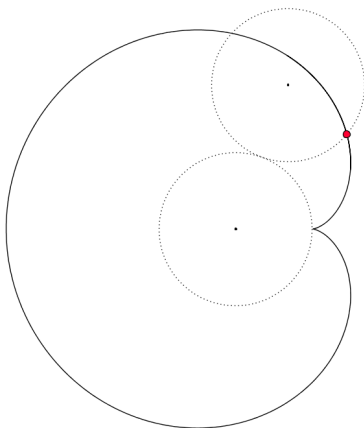
Nekatere vrednosti parametra m dajo še posebej znane in zanimive krivulje z značilnimi imeni. Omenimo samo dve:



Slika 23 Primer epikloide

Kardioida

Kardioida ali srčnica je epikloida z vrednostjo $m = 1$. To pomeni, da kardioida nastane kot pot točke na krožnici, ki jo kotalimo po zunanji strani druge krožnice z enakim radijem.



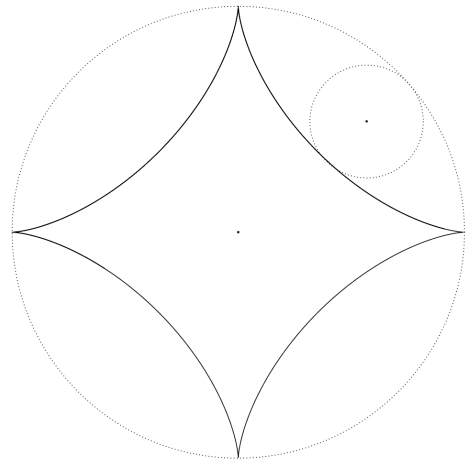
Slika 24 Kardioida

Asteroida

Asteroida je hipocikloida, ki jo dobimo pri vrednosti $m = \frac{1}{4}$ (ali $m = \frac{3}{4}$, kot pove Izrek o dvojnem generiranju). To krivuljo opiše točka na krožnici z radijem 1, ki se kotali po notranjosti krožnice z radijem 4. Zanj je med drugim značilno, da je dolžina medosnega odseka tangente na katerokoli točko krivulje enaka radiju večje krožnice.

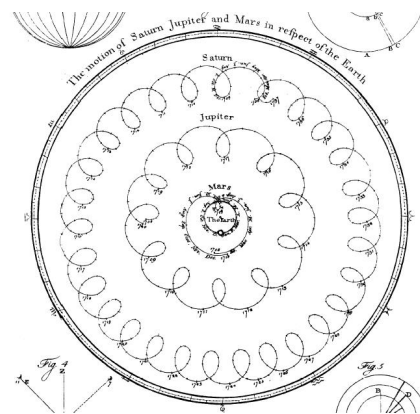
Zaključek

Mars je že v antiki pritegnil Grke, ki so opazili, da se ne giblje po ustaljenem krožnem tiru kakor so menili o gibanju zvezd. Z veliko truda so ugotovili,



Slika 25 Asteroida

da bi tiru Marsa utegnili ustrežati epikloida.



Slika 26 Domnevne epikloide planetov

Čeprav je trditev napačna, saj Zemlja ni središče vesolja, je bila ugotovitev vseeno velik dosežek za tedanje razmere, saj je gibanje zelo natančno opisala. Anton Pannekoek jo je v svoji knjigi History of Astronomy (Zgodovina astronomije) pripisal Ptolomeju in jo razglasil za največji dosežek antične astronomije.

Ko je stoletja kasneje postala splošno sprejeta in priznana Kopernikova domneva o heliocentričnem sistemu, se je potreba za opisovanje tirov planetov z epikloidami zmanjšala, saj je bila na voljo boljša razlaga njihovega gibanja. Kmalu potem pa je danski astronom Olaus Roemer opazil, da so cikloidne krivulje uporabne tudi v mehaničnih napravah, zato so iznašli številne mehanske priprave za risanje cikloid, ki so jih s pridom uporabljali pri načrtovanju mehanskih konstrukcij.

Dandanes tovrstne krivulje hitro narišemo s ka-

terim od računalniških programov in mehanske priprave za risanje več zanimive za praktično uporabo. Čeprav se tega ponavadi ne zavedamo, pa nas cikloidne krivulje pogosto spremljajo v vsakdanjem življenju. Pomislimo samo na pot ventila na zračnici med vožnjo iz Ljubljane v Koper.

Nam pa je spoznavanje cikloidnih krivulj še posebej pomagalo. Ponoči lahko zdaj končno dobro spimo, čeprav naš dragi satelit kroži okoli Fobosa, saj vsak trenutek vemo, kje je. No, vsaj približno toliko natančno kot stari Grki ...

Stožnice v taksi razdalji

Amela Rakanović, Boris Mitrović, Dominik Šurc, Katja Berčič (mentor)

Izhodiščni problem

Sonda na površju Marsa ima omejeno zalogo goriva. Zaradi pokvarjenega krmiljenja se lahko premika le v smereh sever-jug ali vzhod-zahod. Katere točke na zemljevidu lahko doseže, če se mora nato vrniti v bazo?

Ideja za rešitev

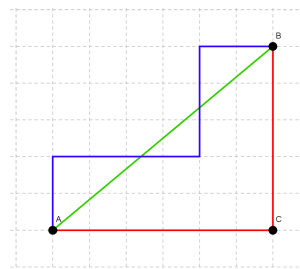
V geometriji pri merjenju razdalj ponavadi uporabljamo evklidsko razdaljo, vendar v vsakdanjem življenju pogosto razmišljamo tudi o takoimenovani *taksi razdalji*. Predstavljajmo si veliko mesto, v katerem so vse ulice ravne in se sekajo le pravokotno. Dva prijatelja, bogat in malo manj premožen, morata priti na nasprotni konec mesta. Bogataš se bo usedel v helikopter, navaden smrtnik pa se bo moral s taksijem peljati po ulicah. Razdalja med izbranimi točkama je zanj različna. Bogataš bo po zračni črti prepotoval evklidsko razdaljo med dvema točkama, *taksi razdalja* pa je tista, ki meri dolžino najkrajše poti, kot jo bo prepotoval njegov prijatelj. Slednja pot bo seveda daljša, zanimivo pa je, da je zanj na voljo več enako dobrih možnosti.

Na sliki po zeleni črti potuje helikopter. Očitno je, da so vse modre in rdeče poti enako dolge, v nadaljevanju pa bomo dokazali, da je rdeča pot res najkrajša možna.

Oglejmo si poljubno pot našega taksija med točkama. Vsota dolžin vseh vodoravnih daljic gotovo ni manjša od dolžine daljice AC. Prav tako ugotovimo, da vsota vseh navpičnih daljic ni manjša od

Viri

1. Marko Razpet: *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma, DMFA, Ljubljana, 1998.
2. Eli Maor: *Trigonometric delights*, Princeton University press, 1998.



Slika 27 Pot helikopterja in možne poti taksija

dolžine daljice CB. Dolžina najkrajše poti za taksi med točkama A in B je torej enaka $|AC| + |CB|$.

Aktualizirajmo problem: na začetku omenjena naloga je nekoliko drugačna, saj imamo omejen prostor (zaradi goriva). Zato hočemo poiskati vse točke, ki so enako oddaljene od mesta, kjer je pristala sonda. V evklidski geometriji vemo, da je to krožnica, v taksi geometriji pa oblika množice točk, ki jih sonda lahko doseže, ni tako očitna.

Rešitev

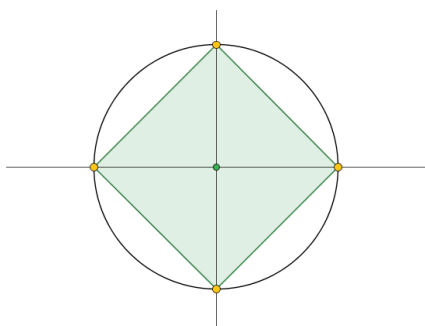
Če se hoče sonda vrniti na prvotno točko, ne sme izstopiti iz določenega območja. Vzemimo, da je začetna točka koordinatno izhodišče. Glede na to, da ima sonda goriva za 10 kilometrov, se od baze lahko oddalji za največ 5 kilometrov.

Najprej narišimo štiri točke, ki jih lahko dosežemo, če se premikamo samo naravnost. Dve ležita na abscisi, dve na ordinati, vse pa so od izhodišča oddaljene za 5 kilometrov (tu se evklidska in taksi

razdalja ujemata). Poskusimo najti še ostale točke. Premaknimo se za razdaljo x po abscisi. Zanima nas, kako daleč se lahko premaknemo navzgor ali navzdol. Goriva za eno smer imamo za 5 km, kar pomeni, da je $|x|+|y| = 5$. Rešimo enačbo in dobimo:

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{za } x, y > 0, \\ x - 5 & \text{za } x > 0, y \leq 0, \\ -x - 5 & \text{za } x, y \leq 0, \\ x + 5 & \text{za } x \leq 0, y > 0. \end{cases}$$

Ko vse štiri daljice narišemo, je pred nami rob kvadrata. To je končna slika naše taksi krožnice – krožnice v *taksi razdalji*.



Slika 28 Krožnica v taksi razdalji

Kaj sploh je taksi razdalja?

V ravnini izberimo točki A s koordinatama (x_1, y_1) in B s koordinatama (x_2, y_2) . Taksi razdaljo med njima definiramo z izrazom

$$d_T(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Ta izraz opiše dolžino najkrajše poti med dvema točkama v ravnini, če lahko od ene do druge točke potujemo le kot taksist po pravokotnih ulicah: le v vodoravni in navpični smeri, ne pa poševno.

Hitro se lahko prepričamo, da ima taksi razdalja naslednje lastnosti:

- Taksi razdalja med poljubnima različnima točkama je vedno pozitivna.
- Taksi razdalja med točkama je enaka nič natančno tedaj, ko točki sovpadata.
- Taksi razdalja je simetrična: $d_T(A, B) = d_T(B, A)$,
- Taksi razdalja zadošča trikotniški neenakosti: $d_T(A, C) \leq d_T(A, B) + d_T(B, C)$.

Stožnice v taksi razdalji

Stožnice so krivulje, ki jih dobimo kot množico rešitev kvadratne enačbe z dvema neznankama. Lahko jih definiramo geometrijsko z uporabo pojma razdalja: krožnica je naprimer množica vseh točk v ravnini, ki so od izbranega središča enako oddaljene. Če razdaljo merimo evklidsko, lahko vsako krožnico opišemo z znano enačbo $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.

Stožnice pa lahko definiramo tudi kot dvorazsežne presečne krivulje, ki nastanejo, če preseka mo krožni stožec z ravnino. V evklidski geometriji sta obe definiciji ekvivalentni, v taksi geometriji pa se definiciji razlikujeta, zato bomo uporabljali prvo definicijo.

Elipsa

Elipsa je množica točk v ravnini, za katere velja, da je vsota njihovih razdalj do dveh izbranih točk – gorišč enaka izbrani konstanti. Običajno elipso seveda poznamo. Kakšna pa je ta množica v taksi geometriji? Odgovor na to vprašanje bo hkrati tudi odgovor na našo začetno nalogo o točkah, ki ji lahko obišče sonda, če začne v gorišču G in konča v gorišču H .

Premislimo najprej za točke, ki ležijo levo od gorišča G , in pogledajmo, kakšna je skupna razdalja s . Če je A najbolj skrajna točka, do katere lahko pridemo, bo sonda prepotovala razdaljo $d_T(G, A) + d_T(A, H)$. Opazimo, da je

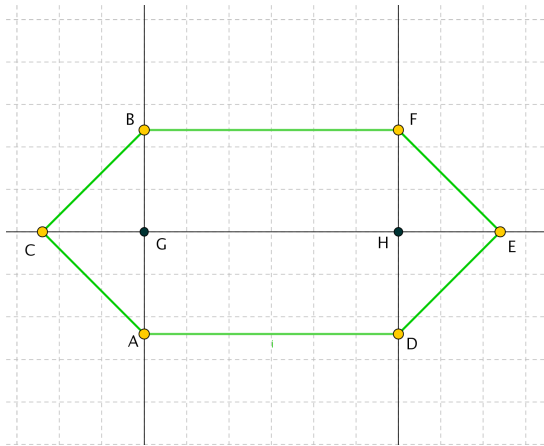
$$d_T(H, A) = d_T(G, H) + d_T(G, A),$$

pri čemer je $d_T(G, H)$ kar $|GH|$. Skupna razdalja s je torej enaka $2d_T(G, A) + |GH|$ in za tako točko A velja $d_T(G, A) = \frac{s-|GH|}{2}$. Levo od gorišča G zato vse skrajne točke ležijo na taksi polkrožnici (dveh pravokotnih daljicah) s polmerom $\frac{s-|GH|}{2}$. Na desni strani velja podobno.

Za točke med G in H mora sonda prepotovati razdaljo $|GH|$, lahko pa se premakne tudi največ za razdaljo $\frac{s-|GH|}{2}$ navzgor ali navzdol. Tako sestavimo končno sliko taksi elipse.

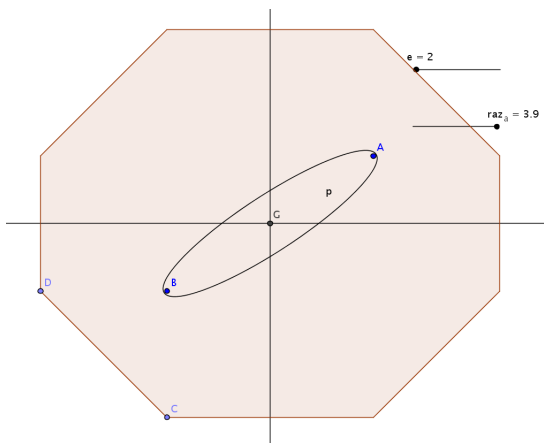
Splošen primer elipse

Gorišči ležita na premici, ki ni vzporedna nobeni od koordinatnih osi, zato je taksi razdalja med go-



Slika 29 Taksi elipsa z goriščema na vodoravni premici

riščema $d_T(G, H) = |GA| + |AH|$. Ločimo primere, ko so točke po x ali y osi med goriščema in ko so točke v kotih. Z enakim sklepom kot pri posebnem primeru pridemo do končne slike elipse.



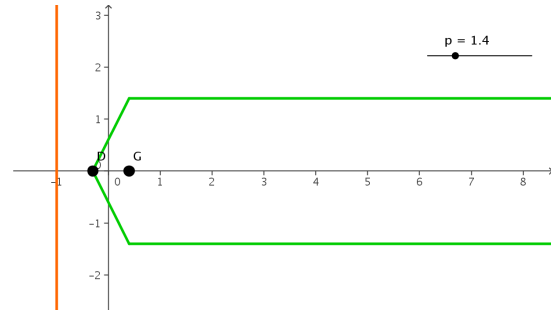
Slika 30 Taksi elipsa s splošno lego gorišč

Parabola

Parabola je množica točk v ravnini, za katere velja, da so enako oddaljene od gorišča in premice vodnice. V tej definiciji lahko namesto evklidske zopet uporabimo taksi razdaljo. Za enostavnejši razmislek vzemimo, da je vodnica vzporedna ordinati. Razdaljo med premico in goriščem označimo s p . Najprej poiščemo točko, ki leži na razpolovišču daljice med premico in goriščem. Nato določimo točki, ki sta za p oddaljeni od premice in gorišča. Za točke levo od gorišča velja enačba $x = p - x + |y|$. Če izrazimo y , dobimo enačbi dveh premic

$$\begin{aligned} y &= 2x - p, \\ y &= -2x + p. \end{aligned}$$

Za točke desno od gorišča velja enačba $x = x - p + |y|$, če izrazimo y , pa dobimo enačbo $|y| = p$. Če vodnica ni vzporedna nobeni od koordinatnih osi, je računanje razdalje med premico in goriščem odvisno od naklona premice.



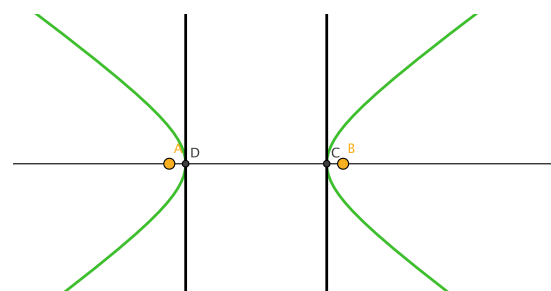
Slika 31 Primer taksi parabole

Hiperbola

Hiperbola z goriščema G in H in veliko polosjo a je množica točk v ravnini, za katere je razlika razdalj do gorišč (vedno odštevamo manjšo razdaljo od večje) enaka $2a$. Če izberemo gorišči na abscisni osi, ki sta za e oddaljeni od izhodišča, za točke na taksi hiperboli med gorišči velja enačba

$$(|e + x| + |y|) - (|e - x| + |y|) = 2a$$

Ko enačbo poenostavimo, dobimo $|x| = a$, kar pomeni, da ta del hiperbole sestavljata dve navpični premici. Za točke na preostalem območju pa se lahko hitro prepričamo, da ustrezna enačbanima rešitev.



Slika 32 Enostaven primer taksi hiperbole

Splošen primer hiperbole

Denimo, da gorišči ne ležita na skupni vodoravni premici: $A(-e, -f)$, $B(e, f)$. Podobno kot v prejšnjih primerih obravnavamo rešitve enakosti

$$|d_T(T, A) - d_T(T, B)| = 2a.$$

Za točke med goriščema na naši sliki denimo velja enačba

$$|(e + x + f + y) - (e - x + f - y)| = 2a,$$

kar se poenostavi v $y = a - x$ in $y = -x - a$. Na osnovi zgornjih primerov lahko bralec zlahka premisli, da je spodaj res slika hiperbole v taksi razdalji. Skozi točko T potegnemo vzporednico abscisi. Da točke desno od gorišč na tej premici ustrezajo pogojem preverimo z računom:

$$d_T(G, A) = d_T(G, T) + d_T(T, A)$$

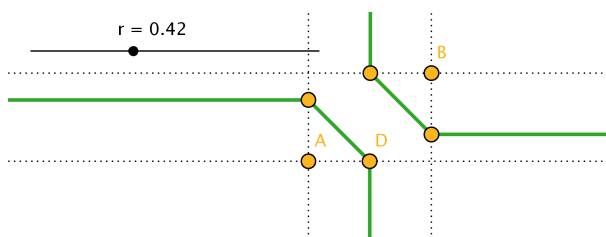
$$d_T(H, A) = d_T(H, T) + d_T(T, A)$$

Razlika je torej kar

$$d_T(G, A) - d_T(H, A) = d_T(G, T) + d_T(T, A) - d_T(H, T) - d_T(T, A)$$

$$d_T(G, T) - d_T(H, T) = 2a$$

Bralec lahko brez težav preveri, da so to tudi vse take točke. Podobno sklepamo na ostalih straneh.



Slika 33 Splošen primer taksi hiperbole

Zaključek

Pojem razdalje ni vedno tisto, kar si človek predstavlja. Tako mora ob besedni zvezi taksi razdalja spremeniti način razmišljanja, saj znani geometrijski pojmi z drugačno definicijo spremenijo svojo obliko. Določili smo vse stožnice in računsko dokazali, da naše domneve držijo. Ob tem se hitro pojavijo ideje za nadaljnje raziskovanje. Denimo, da stožec prenesemo v taksi geometrijo; dobimo štiri-strano piramido. Kakšne so potem njene presečne ravnine? Ali pa vzemimo krivulje višjih redov in poiščimo njihove ustreznice v taksi geometriji. Prostora za raziskovanje je veliko, zato se zavedamo, da smo s tem projektom raziskali zgolj osnove taksi geometrije.

Viri

1. Taxicab geometry. Online na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_geometry
2. Richard Laatsch: Pyramidal sections in Taxicab Geometry, Mathematics Magazine, vol. 55. no. 4, september 1982

Bézierjeve krivulje

Polona Durcik, David Kraljič, Aljaž Zalar, Uroš Kuzman (mentor)

Uvod

Sonda na Marsu raziskuje površje prekrito s kraterji. Želimo, da se jim sonda na svoji poti izogne, zato iščemo elegantno pot med njimi, predstavljeno s čim manj podatki.

Običajno podajamo krivulje v parametrični obliki ali kot graf funkcije, francoska avtomobilska inženirja Bézier in Casteljau pa sta se sredi dvajsetega stoletja lotila ponazoritve krivulj s podajanjem kontrolnih točk.

Tako dobljene krivulje se imenujejo Bézierjeve krivulje, algoritem za njihov izračun pa se imenuje Casteljaujev algoritem.

Bézierjeve krivulje

Kvadratne Bézierjeve krivulje

Konstruirajmo krivuljo, ki se začne in konča v izbranih točkah A in C , pri konstrukciji pa bomo uporabili še vmesno kontrolno točko B . Na daljico AB postavimo točko A' in na daljico BC točko B' tako, da bo

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = t.$$

Točka A' je torej podana z

$$A'(t) = A + t(B - A),$$

točka B' pa z

$$B'(t) = B + t(C - B),$$

pri nekem t , $0 \leq t \leq 1$. Nato na daljici $A'B'$ določimo točko T , tako da bo

$$\frac{A'T}{A'B'} = t,$$

pri istem izboru parametra t .

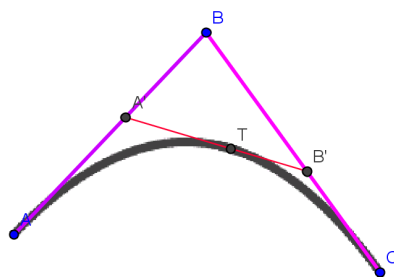
Točka T sedaj zarisuje krivuljo v odvisnosti od parametra t . Ugotovimo

$$T(t) = A' + t(B' - A').$$

Če torej $T(t)$ izrazimo z začetnimi točkami dobimo

$$\begin{aligned} T(t) &= A + t(B - A) + t((B + t(C - B)) - (A + t(B - A))) \\ &= A + t(2B - 2A) + t^2(C - 2B + A), \end{aligned}$$

kar je parametrizacija **kvadratne Bézierjeve krivulje**.



Slika 34 Konstrukcija kvadratne Bézierjeve krivulje

Očitno je, da pri vrednosti parametra $t = 0$ dobimo točko A , pri vrednosti parametra $t = 1$ pa točko C , kar pomeni, da se krivulja začne oziroma konča v omenjenih točkah. Če **odvajamo** parametrizacijo dobljene krivulje, dobimo

$$T'(t) = B - 2A + 2t(C - 2B + A).$$

Pri robnih vrednostih parametra t dobimo

$$T'(0) = 2(B - A),$$

$$T'(1) = 2(C - B).$$

Opazimo torej, da je smer tangente na krivuljo v začetni oziroma končni točki, odvisna le od sosednje kontrolne točke.

Kubične Bézierjeve krivulje

Sedaj izberimo začetno točko A , končno točko D in še dve vmesni kontrolni točki B in C . Na daljicah AB , BC in CD zaporedoma izberemo točke A' , B' in C' , tako da je

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CD} = t,$$

pri nekem t , $0 \leq t \leq 1$. Nato na daljicah $A'B'$ in $B'C'$ izberemo točki A'' in B'' , da velja

$$\frac{A'A''}{A'B'} = \frac{B'B''}{B'C'} = t,$$

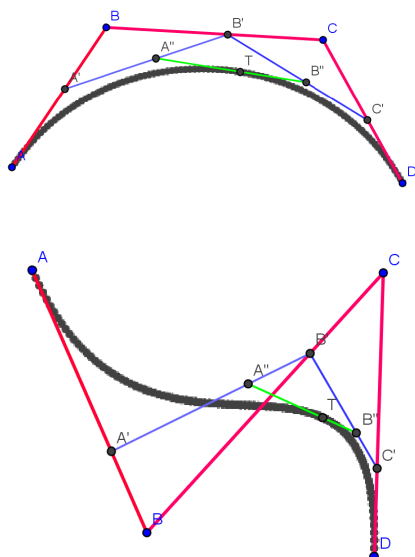
pri isti vrednosti parametra t . Sedaj na daljici $A''B''$ izberemo še točko T , za katero naj velja

$$\frac{A''T}{A''B''} = t,$$

pri izbrani vrednosti t . S podobnim izračunom kot v prejšnjem razdelku dobimo parametrično izrazitev krivulje v odvisnosti od štirih izbranih točk

$$T(t) = A + t(3B - 3A) + t^2(3C - 6B + 3A) + t^3(D - 3C + 3B - A),$$

kar je parametrizacija **kubične Bézierjeve krivulje**.



Slika 35 Konstrukcija kubične Bézierjeve krivulje

Spet opazimo, da velja

$$T'(0) = 3(B - A)$$

$$T'(1) = 3(D - C),$$

kar nam potrdi podobno lastnost kot pri kvadratnih krivuljah.

Bernsteinovi polinomi in Bézierjeve krivulje višjega reda

Zapis Bézierjevih krivulj višjega reda

V primerih prejšnjih razdelkov smo opazili, da je

število kontrolnih točk za eno večje od reda Bézierjeve krivulje, ki jo dobimo s Casteljaujevim algoritmom. Sedaj bi želeli parametrično obliko Bézierjeve krivulje reda n , v odvisnosti od $n + 1$ izbranih točk, zapisati za splošno naravno število $n \geq 2$.

Razvijmo izraz

$$(t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}.$$

Posamezne člene tega razvoja imenujemo Bernsteinovi polinomi, ki jih označimo z $J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$. Za njih veljajo naslednje lastnosti:

Lastnost vsote:

$$J_{n,0}(t) + J_{n,1}(t) + J_{n,2}(t) + \dots + J_{n,n-1}(t) + J_{n,n}(t) = 1.$$

Nenegativnost:

$$J_{n,i}(t) \geq 0 \text{ za } 0 \leq t \leq 1.$$

Baza:

$J_{n,0}(t), J_{n,1}(t), \dots, J_{n,n-1}(t), J_{n,n}(t)$ tvorijo bazo polinomov stopnje največ n . (Standardna baza je $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n$.)

Zapis Bézierjeve krivulje, podane z $n + 1$ kontrolnimi točkami P_0, P_1, \dots, P_n , lahko razvijemo po bazi Bernsteinovih polinomov in dobimo splošen zapis parametrizacije v odvisnosti od kontrolnih točk

$$P(t) = \sum_{i=0}^n J_{n,i} P_i; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Sedaj si oglejmo dokaz zgornje domneve o predstavitvi krivulj reda n , ki jih dobimo z Casteljaujevim algoritmom, z Bernsteinovimi polinomi. Pri dokazovanju bomo uporabili indukcijo, zato si najprej oglejmo primer, ko je $n = 2$:

$$\begin{aligned} P(t) &= t^2 P_0 + 2t(1 - t)P_1 + (1 - t)^2 P_2 \\ &= P_2 + t(2P_1 + 2P_2) + t^2(P_0 - 2P_1 + P_2), \end{aligned}$$

kar je ravno kvadratna Bézierjeva krivulja iz prvega razdelka s kontrolnimi točkami P_2, P_1 in P_0 .

Sedaj predpostavimo, da zapis velja za krivuljo podano z n kontrolnimi točkami. Ali lahko sklepamo, da je zapis analogen tudi pri krivuljah določenih z $n + 1$ točkami. Izberimo $n + 1$ kontrolnih točk in jih označimo s P_0, P_1, \dots, P_n . Z enim korakom al-

goritma dobimo n točk $P'_0(t), P'_1(t), \dots, P'_n(t)$. Zanje veljajo enakosti

$$P'_i(t) = (1-t)P_i + tP_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Po indukcijski predpostavki lahko uporabimo zapis Bézierjeve krivulje na novih n točkah

$$P(t) = \sum_{i=0}^n J_{n,i} P'_i = (1-t)^n P'_0 + \binom{n}{1} t(1-t)^{n-1} P'_1 + \dots + t^n P'_n.$$

Če sedaj točke P'_0, P'_1, \dots, P'_n izrazimo z originalnimi kontrolnimi točkami in upoštevamo, da je

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1},$$

lahko zaključimo, da velja

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n+1} J_{n+1,i} P_i.$$

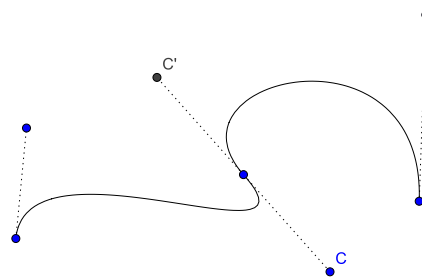
Zlepki Bézierjevih krivulj

V praksi pogosto želimo najti krivulje zelo zapletenih oblik. Opazno je, da je število zavojev posamezne krivulje povezano z njenim redom. Vendar pa je krivulje visokega reda težko nadzorovati s kontrolnimi točkami, saj je odvisnost med obliko krivulje in njenimi kontrolnimi točkami zelo nestabilna. To pomeni, da lahko majhna sprememba pozicije kontrolne točke povzroči zelo opazno spremembo oblike krivulje. Zato v praksi krivulje zapletenih oblik zlepimo iz večih krivulj nižjih redov, predvsem kubičnih.

Dve krivulji združimo tako, da je končno točko prve krivulje ponovimo kot začetno točko druge krivulje. Vendar pa želimo, da je zlepek med dvema krivuljama gladek, kar pomeni, da se tangenti krivulj v končni točki prve krivulje in začetni točki druge krivulje ujemata. Ugotovili smo, da je smeri vektor tangente v končni in začetni točki krivulje enak vektorju razlike med robno točko in sosednjo kontrolno točko. Torej moramo na podlagi končne

točke in njej sosedne kontrolne točke prve krivulje izbrati še prvo prosto kontrolno točko druge krivulje. To storimo tako, da predzadnjo točko prve krivulje prezrcalimo preko stičišča in njeno sliko uporabimo kot drugo kontrolno točko druge krivulje. Tako bo dobljeni zlepek gladek.

Zaključek



Slika 36 Konstrukcija zlepek z »gladkim prehodom«.

Bézierjeve krivulje se dandanes največ uporabljajo v računalniški grafiki. Namesto da krivuljo, ki naj se zariše na enkranu, opišemo z vsako točko posebej, enostavno izberemo poljubne točke, med katerimi se izriše krivulja. To je uporabno predvsem v programih za vektorsko grafiko in tudi računalniške pisave so oblikovane po principu Bézierjevih krivulj.

Viri

1. Michael Hvidsten: *Geometry with geometry explorer*. McGraw-Hill, New York, first edition, 2005, ISBN 0-07-294863-9.
2. Kirby A. Baker: *Cubic Bézier Curves*. [online] http://www.math.ucla.edu/~baker/149.1.02w/handouts/bb_bezier.pdf

Optimalna dostava goriva in Fermatova točka

Peter Koželj, Matej Drame, Nino Bašič (mentor)

Problem

Sonde so pristale na Marsu. Uporabljajo predelan hiper-antimaterijski pogon, ki pa kljub izredni zmogljivosti potrebuje polnjenje vsakih nekaj mesecev zaradi sondine energijske požrešnosti. Ker se sonde pri svojem delovanju zelo razpršijo po površju Marsa, je potrebno vedno znova poiskati lokacijo za pristanek posebne polnilne postaje. S stališča učinkovitosti mora biti ta lokacija postavljena tako, da bodo sonde skupno prevozile najkrajšo pot, da pridejo do polnilne postaje. V članku predstavljamo geometrijske rešitve tega problema za tri in za štiri sonde.

Uvod

Problema se bomo lotili geometrijsko. Vsako sondo bomo predstavili s po eno točko (velikost sond je zanemarljiva v primerjavi z njihovo medsebojno razdaljo). Rešitev naloge je točka, pri kateri je vsota vseh razdalj od sond do te točke minimalna. Če imamo opraviti s samo eno ali dvema sondama je rešitev očitna. Najbolj zanimiva je situacija, ko so sonde tri ali pa štiri. Če jih je več, geometrijska konstrukcija take točke ni več mogoča. V tem primeru si moramo pomagati z numeričnimi metodami, s katerimi lahko izračunamo poljubno dober približek.

Tri sonde

Če imamo v ravnini tri točke, so lahko te kolinearne (tu je rešitev očitna), lahko so oglišča trikotnika v katerem so vsi koti manjši od 120° , ali pa so oglišča trikotnika v katerem eden kot meri 120° ali več. Pokazali bomo, da je v trikotniku, kjer so vsi koti manjši od 120° rešitev Fermatova točka. Če kateri od kotov meri več kot 120° , potem je iskana točka oglišče trikotnika pri tem kotu. (Bralec naj s premislekom sam ugotovi, zakaj to drži.)

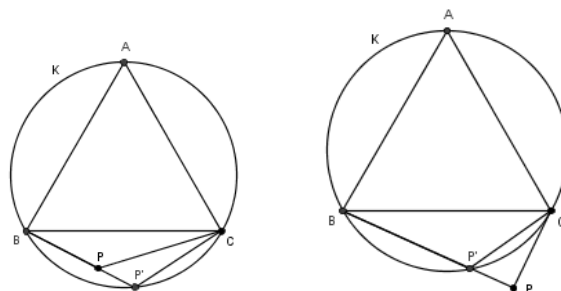
Fermatova točka

Izrek 1 Naj bo $\sphericalangle ABC$ enakostranični trikotnik in \mathcal{K} njemu očrtana krožnica. Naj leži točka P na nasprotni strani premice skozi B in C kot točka A . Potem je

$\sphericalangle BPC = 120^\circ$ natanko takrat, ko P leži na \mathcal{K} .

Dokaz. Naj bo $P \in \mathcal{K}$. Ker je $ABPC$ tetivni štirikotnik, je $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CPB = 180^\circ$ in ker je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, je $\sphericalangle CPB = 120^\circ$. Dokažimo izrek še v drugo smer. Predpostavimo, da $\sphericalangle CPB = 120^\circ$. S protislovjem bomo dokazali, da mora P v tem primeru ležati na krožnici.

Če P ne leži na krožnici \mathcal{K} , potem nosilka daljice BP seka krožnico \mathcal{K} v točki P' . Ker P' leži na krožnici, sledi, da je $\sphericalangle CP'B = 120^\circ$ in da je nosilka daljice $P'C$ vzporedna s PC , kar pa očitno ne more držati.

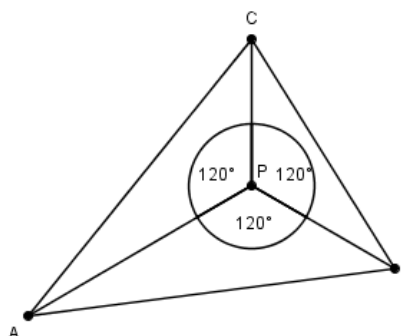


Slika 37 K dokazu izreka 1

Definicija. Naj bo $\triangle ABC$ tak trikotnik, v katerem so vsi notranji koti manjši od 120° . Točko P , za katero velja

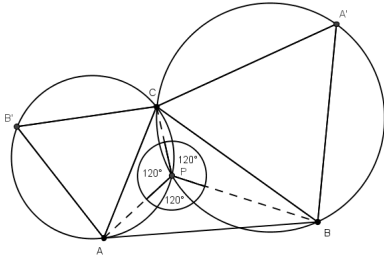
$$\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120^\circ$$

imenujemo **Fermatova točka**.



Slika 38 Definicija Fermatove točke

Izrek 2 Fermatova točka obstaja in je ena sama.



Slika 39 K dokazu izreka 2

Dokaz. Nad stranicami $\triangle ABC$ konstruirajmo enakostranične trikotnike $\triangle AC'B$, $\triangle BA'C$ in $\triangle ACB'$, ki ležijo zunaj $\triangle ABC$. Naj bo P od C različno presečišče trikotnikoma $\triangle ACB'$ in $\triangle BA'C$ očiščenih krožnic. Ker je $APCB'$ tetivni štirikotnik, velja $\sphericalangle AB'C + \sphericalangle CPA = 180^\circ$. Vemo, da je $\sphericalangle AB'C = 60^\circ$ (enakostranični trikotnik), torej je $\sphericalangle CPA = 120^\circ$. Podobno dobimo še $\sphericalangle BPC = 120^\circ$. Ker je $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA = 360^\circ$ sledi $\sphericalangle APB = 120^\circ$. Pokazali smo, da Fermatova točka obstaja in kako jo skonstruiramo.

Sedaj bomo pokazali, da obstaja natanko ena Fermatova točka. Denimo, da poleg P obstaja še Q , ki je tudi Fermatova točka. Po izreku [tetivni] mora ležati na trikotniku $\triangle ACB'$ očiščeni krožnici in hkrati na trikotniku $\triangle BA'C$ očiščeni krožnici. Iz tega sledi, da Q leži na presečišču teh dveh krožnic, ki ni enako C . Torej je $Q = P$.

Izrek 3 Dan naj bo trikotnik $\triangle ABC$, v katerem so vsi koti manjši od 120° . Fermatova točka ima najmanjšo vsoto razdalj do oglišč $\triangle ABC$.

Dokaz. V trikotniku $\triangle ABC$ so vsi koti manjši od 120° . Izberemo si poljubno točko Q in jo povežemo z vsemi oglišči trikotnika $\triangle ABC$. Na stranici AB skonstruiramo enakostranični trikotnik $\triangle A'BA$. Nato trikotnik $\triangle ABQ$ zavrtimo za 60° v pozitivni smeri okoli točke B . Pri tem se A preslika v A' in Q v Q' . Vrtež ohranja razdalje, torej je $|AQ| = |A'Q'|$ in $|QB| = |Q'B|$. Dokažimo še, da je $|QB| = |QQ'|$.

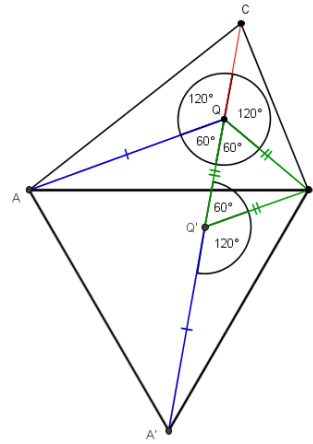
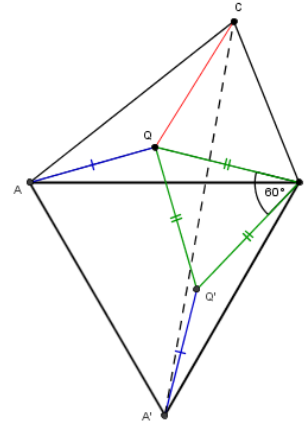
$$\sphericalangle ABQ' = \sphericalangle ABA' - \sphericalangle Q'BA'$$

Izrazimo:

$$\sphericalangle Q'BA' = \sphericalangle ABA' - \sphericalangle ABQ' = 60^\circ - \sphericalangle ABQ'$$

Ugotovimo še:

$$\sphericalangle QBQ' = \sphericalangle QBA + \sphericalangle ABQ'$$



Slika 40 K dokazu izreka 3

Ker je $\sphericalangle QBA = \sphericalangle Q'BA'$, lahko $\sphericalangle QBA$ nadomestimo z $60^\circ - \sphericalangle ABQ'$:

$$\sphericalangle QBQ' = 60^\circ - \sphericalangle ABQ' + \sphericalangle ABQ' = 60^\circ$$

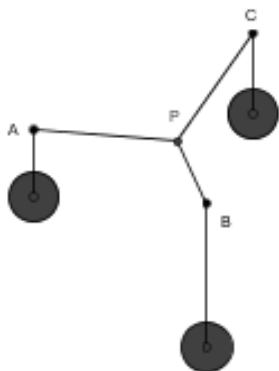
Ker kot $\sphericalangle QBQ' = 60^\circ$ oklepata skladni daljici QB in $Q'B$, sledi da je $\triangle Q'BQ$ enakostraničen in $|QB| = |QQ'|$.

Iz tega sledi $|CQ| + |AQ| + |BQ| = |CQ| + |A'Q'| + |QQ'|$. Vsota teh razdalj je najmanjša, kadar točki Q in Q' ležita na daljci CA' .

Dokažimo, da se to zgodi, če za Q vzamemo Fermatovo točko. Takrat so koti $\sphericalangle CQA = \sphericalangle BQC = \sphericalangle AQB = 120^\circ$. Sledi $\sphericalangle A'Q'B = 120^\circ$. Prej smo dokazali, da sta $\sphericalangle BQ'Q$ in $\sphericalangle Q'QB$ velika 60° . Sledi $\sphericalangle Q'QC = \sphericalangle A'Q'Q = 180^\circ$, torej ležita točki Q in Q' na daljci CA' .

S tem smo dokazali, da ima Fermatova točka najmanjšo vsoto razdalj do oglišč trikotnika.

Fizikalni pristop



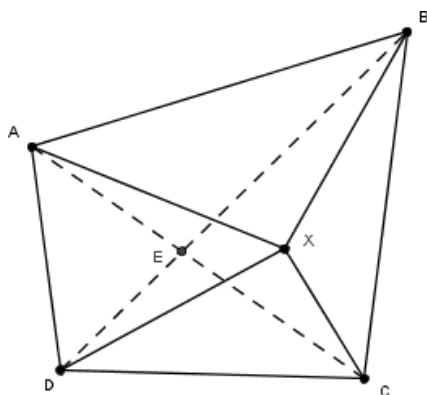
Slika 41 Fizikalna rešitev

Slika 41 prikazuje fizikalno napravo s tremi škripci, ki predstavljajo točke trikotnika. Preko njih so napeljane vrvice s tremi enako težkimi utežmi, vse vrvice pa so spete v vozle na sredini. Ker sistem uteži teži k temu, da bi imel čim manjšo potencialno energijo, se uteži postavijo tako, da je vsota dolžin vrvic med škripci in utežmi čim večja. Torej je dolžina preostale vrvi najkrajša možna. Vozel se tako postavi v Fermatovo točko.

Štiri ali več sond

Primeri, kjer tri ali pa vse štiri sonde ležijo na isti premici so očitni. Razmisliti je treba le še primer, ko tvorijo točke konveksni štirikotnik in pa primer, ko ena od točk leži v notranjosti trikotnika ki ga tvorijo ostale tri točke. (Slednji primer puščamo v razmislek bralcu.)

Izrek 4 Točka z najmanjšo vsoto razdalj do oglišč štirikotnika leži na presečišču diagonal tega štirikotnika.



Slika 42 K dokazu izreka 4

Dokaz. Vzemimo poljuben štirikotnik ABCD in poljubno točko X. Povežimo točko X z vsemi oglišči štirikotnika ABCD. Iz trikotniške neenakosti sledi

$$|BX| + |XD| \geq |BD| \quad \text{in} \quad |AX| + |XC| \geq |AC|$$

Seštejmo neenačbi:

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| \geq |BD| + |AC|$$

Zanima nas torej najmanjša vrednost izraza $|AX| + |BX| + |CX| + |DX|$. Iz prejšnje neenačbe sledi, da je najmanjša vrednost tega izraza ravno $|BD| + |AC|$. Torej točka z najmanjšo vsoto razdalj leži na presečišču diagonal.

Pri večjem številu točk eksaktna rešitev problema v splošnem ni znana, lahko pa jo konstruiramo iterativno. Naj bodo x_1, x_2, \dots, x_m točke v ravnini, kjer je $x_i \in \mathbb{R}^2$. S pomočjo enačbe

$$y_{i+1} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{x_j}{|x_j - y_i|} \right) / \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{|x_j - y_i|} \right)$$

dobimo vedno boljši približek prave rešitve.

Viri

1. Petković, M. (1988). Zanimljivi matematički problemi. Beograd: Naučna knjiga
2. Geometric median. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_median

2008



Hiperkocka

Boris Mitrović, Tehniška gimnazija Sevnica, ŠC Krško
Maja Alif, I. Gimnazija v Celju
Mentor: Peter Lendero, UL FMF



Poliedri in življenje na Marsu

Irena Drenšek, Ekonomska šola Novo mesto
Izidor Lamot, Gimnazija Velenje
Jana Vidrih, Gimnazija Ptuj
Mentor: David Gajser, UL FMF



Zlati rez

Nives Naraglav, Gimnazija Koper
Saša Drame, I. Gimnazija v Celju
Urša Pertot, Gimnazija Kranj
Mentor: Dejan Širaj, UL FMF



Biljard

Primož Ocepek, Gimnazija Trbovlje
Matjaž Drolc, Gimnazija Litija
Teja Turk, I. Gimnazija v Celju
Mentor: Tine Mezgec, UP FAMNIT



Igra 15

Matjaž Leonardis, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Filip Kozarski, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Blaž Peterlin, Tehniška gimnazija, ŠC Novo mesto
Mentor: Nino Bašič, UL FMF



Inverzija in Möbiusove transformacije

David Kraljič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Nejc Rosenstein, Gimnazija Lava, Celje
Matej Aleksandrov, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Aleksander Simonič, Gimnazija Ledina, Ljubljana
Mentor: Gašper Zadnik, UL FMF

Hiperkocka

Maja Alif, Boris Mitrović, Peter Lendero (mentor)

Naloga

Si lahko zamislite pravokotnico na tri koordinate prostora? Ker živimo v tridimenzionalnem prostoru, se nam ta naloga zdi prezahtevna. Analitični geometriji to ne povzroča nobenih težav, saj lahko računamo v več dimenzijah, dasiravno si jih ne moremo predstavljati. Za predstavlo pa ostanejo triki: projekcije, sence in sklepanje z manj na več dimenzij.

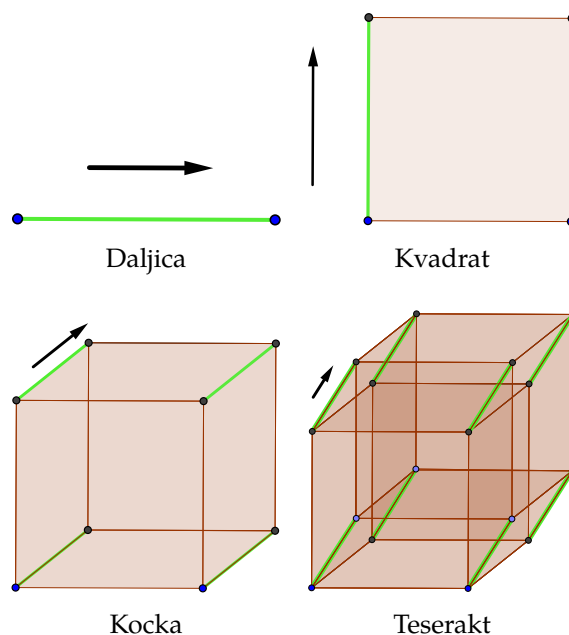
Hiperkocke

Hiperkocke so kocke, posplošene na različne dimenzije. V dimenziji 0 jo predstavlja točka. Enodimenzionalno hiperkocko dobimo tako, da to točko premaknemo za razdaljo ene enote. Njena pot opiše daljico, katere oglišča označimo z 0 in 1. Daljico nato ponovno premaknemo za eno enoto v smeri, pravokotni na samo daljico. Tako dobimo kvadrat - hiperkocko v dveh dimenzijah. Novonastali lik "dvignemo" za eno enoto pravokotno nad ravnino, kot prikazuje slika. Nastane običajna (3 D) kocka.

Naslednji korak je podoben prejšnjim, a abstraktnější, saj kocko premaknemo pravokotno na vse tri koordinatne osi. Prostor, ki je s tem premikom opisan, je 4-dimenzionalna hiperkocka, imenovana tesseract. V vsakem njenem oglišču se stikajo štirje pravokotni robovi. Oglišča označimo s koordinatno četverico, na primer $(0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$... Z njimi lahko računamo enako kot s trojicami v 3 D prostoru ali s pari koordinat v ravnini (2 D). Objekte lahko po tem postopku raztegujemo v neskončnost. Nastajajo novi evklidski prostori s poljubno mnogo dimenzijami.

Štiri in več dimenzij

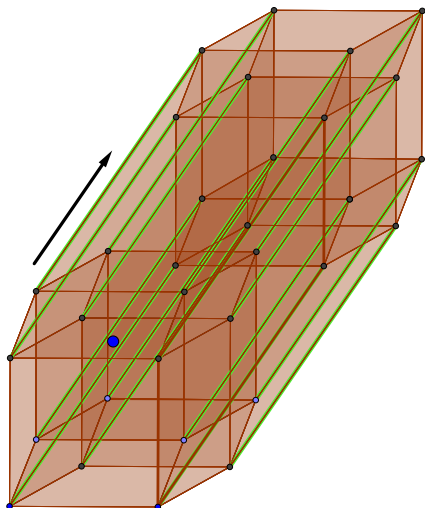
Prvi zanimivi takonastali objekt je torej tesseract. Ker ima le 4 dimenzije, lahko mnoge njegove lastnosti spoznamo intuitivno. Z nadaljnjim premikanjem se pojavijo nove daljice, kvadrati, kocke ... Čeprav se njihovo število povečuje po določenih zakonitostih, si pri penteraktu (5 D) in hiperkockah višjih dimenzij z domišljijo ne moremo več poma-



gati.

n -prostor	oglišča	robovi	kvadrati	kocke	tesseracti	5D hiperkocke	6D hiperkocke
0	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0
6	64	192	240	160	60	12	1
7	128	448	672	560	280	84	14
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112
9	512	2304	4608	5376	4032	2016	672
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360

Pri premiku, potrebnemu za konstrukcijo kocke v dimenzijo višje, dobimo torej začetno in končno sliko, ki ju povezujejo daljice, ploskve ... Število oglišč se tako podvojuje. Točke začetne slike pri premiku opišejo nove daljice. Število robov je zato enako vsoti robov začetne in končne slike ter številu točk ene izmed slik. (glej tabelo) Podobno premik kvadratov opiše novo kocko in je zato število kvadratov hiperkocke v dimenziji višje vsota števila kvadratov začetne in končne slike ter števila daljic začetne slike. Enako velja za 3 D kocko, tesseract in vse hiperkocke višjih dimenzij. Zdi se, da so dobljena števila točk, daljic, kvadratov ... koeficienti potenc polinoma $2x + 1$.



Slika 43 Penterakt

Primer:

$$(2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$(2x + 1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$$

Kocka ima 8 oglišč, 12 robov, 6 ploskev in je sama 1 kocka. Tesseract ima dvakrat toliko oglišč, 32 robov, ploskev je 24, sestavlja pa jo še 8 kock.

Dokažimo to domnevo z indukcijo.

Baza indukcije za $n = 1$: to je 1 daljica, ki ima seveda 2 oglišči. Predpostavimo, da koeficienti polinoma $(2x + 1)^n$ predstavljajo število oglišč, daljic, kvadratov, kock ... n -dimenzionalne kocke. Zdaj naredimo premik kocke v $(n + 1)$ -dimenzijo. S tem se število vsakega izmed objektov (oglišč ...) podvoji, nato pa se mu prišteje število objektov ene manjše dimenzije od n -hiperkocke (torej vsako število tabele dobimo kot vsoto števila v kvadratu predhodnje vrstice in stolpca ter dvakratnika števila nad prvotnim kvadratom).

$$\begin{aligned} (2x + 1)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k \right) (2x + 1) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^{k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k \end{aligned}$$

Pri prvem enačaju smo uporabili indukcijsko predpostavko in dobili, da je število objektov $(n + 1)$ -hiperkocke pri neki potenci x -a dvakratnik istega objekta pri n -hiperkocki (stopnja x -a se poveča, ker ima prostor zdaj eno dimenzijo več), zraven pa je potrebno prišteti nove objekte, ki jih dobimo s premikom objektov z eno dimenzijo manj (sedaj imajo isto stopnjo x -a zaradi enakega razloga kot prej). ■

Hanojski stolpi

Obstaja legenda o indijskem templju, v katerem je velika soba s tremi obrabljenimi drogovi, ki jih obkroža 64 zlatih ploščic. Brahmani premikajo te ploščice glede na pravila igre. Po legendi bo po zadnjem premiku ploščice konec sveta. Ta zgodba je bila povod za matematično igro. Podane imamo tri palice. Na prvi palici so na začetku natakneni obroči različnih velikosti po vrsti od največjega do najmanjšega. Obroče lahko premikamo med palicami. Pri potezi lahko naenkrat z ene palice na drugo preložimo le zgornji obroč, pri čemer morajo biti po koncu poteze na ciljni palici diski urejeni po velikosti od najmanjšega zgoraj do največjega spodaj.



Slika 44 Hanojski stolpi

Problem za n -obročev je izomorfen (enak) iskanju hamiltonske poti po n -hiperkocki. Hamiltonska pot je sprehod po povezavah (robovih) grafa hiperkocke, ki obiše vsako točko natanko enkrat. Postavimo hiperkocko v središče koordinatnega sistema tako, da eno oglišče sovpada z $(0, 0, 0, \dots)$ in da vsi robovi iz tega oglišča ležijo na koordinatnih oseh (teh je n , enako mnogo kot je dimenzija hiperkocke). Torej dobimo koordinate 2^n različnih koordinatnih n -teric oglišč $(1, 0, 0, \dots, 1)$, $(0, 1, 1, \dots, 0)$, ... kjer n -ta koordinata predstavlja n -ti največji obroč. Ko prehodimo eno povezavo na hiperkocki, se prestavimo iz enega oglišča v sosednje, pri tem pa se zamenja natanko ena koordinata oglišča (na primer iz $(0, 0, 1, 0)$ na $(0, 1, 1, 0)$). To pomeni, da smo natakneli obroč na neko drugo palico. Dokažimo zdaj, da nam hamiltonska pot prinese željeni rezultat. Poskusimo spet z indukcijo. Ko imamo en obroč, lahko problemu priredimo enodimenzionalno hiperkocko, to je daljico. Hamiltonska pot daljice je kar $0 \rightarrow 1$, torej enostavno prestavimo obroč iz ene palice na drugo. S tem je igra končana.

Predpostavimo zdaj, da nam hamiltonska pot po n -hiperkocki reši problem za n obročev in imamo pred sabo problem z $n + 1$ obroči. Temu problemu

priredivo graf $(n + 1)$ -dimenzionalne hiperkocke. Ker je njen graf pravzaprav graf dveh n -hiperkock, kjer paroma povežemo istoležeča vozlišča lahko uporabimo indukcijsko predpostavko za prvih n obročev in se sprehodimo po prvi hiperkocki. Ti obroči so potem na drugi, zadnji, največji pa še zmeraj na prvi palici. Prestavimo prvi obroč na tretjo palico in s tem skočimo iz prve n -hiperkocke na drugo. Znova uporabimo indukcijsko predpostavko za prvih n obročev in jih prestavimo iz druge palice na tretjo. Tako lahko naredimo hamiltonsko pot tudi po drugi n -hiperkocki. Uspelo se nam je sprehoditi po celi hiperkocki $(n + 1)$ -dimenzije. ■

Viri

1. Gardner, M. (1978). *Mathematical Carnival*. Great Britain: Pelican Books.
2. TOWER OF HANOI. Online. Citirano 29. avgusta 2008 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Hanoi_towers
3. HYPERCUBES. Online. Citirano 29. avgusta 2008 na naslovu <http://en.wikipedia.org/wiki/Hypercubes>

Poliedri in življenje na Marsu

Izidor Lamot, Jana Vidrih, Irena Drenšek, David Gajser (mentor)

ALH 84001 je meteorit, ki so ga našli v kraju Allan Hills na vzhodu Antarktike leta 1984. [3] Eden najbolj znanih meteoritov je postal leta 1996, ko so raziskovalci NASE sporočili, da vsebuje mikroskopske strukture, ki bi lahko bile fosilni sledovi bakterij. V njem so namreč odkrili kristalne strukture v obliki prirezanega heksa-oktaedra premera od 20 do 100 nanometrov. Podobne strukture nastajajo pri presnovnih procesih nekaterih bakterij na Zemlji, ni pa znano, da bi nastajale v naravi kot produkt kakega anorganskega procesa. Ker bi lahko spore bakterij v kamninah po nekaterih predvidevanjih živele v vesolju do 5 let, bi lahko ta najdba potrjevala celo možnost prenosa življenja z Marsa na Zemljo. V tem prispevku tega sicer žal ne moremo potrditi, lahko pa vam razložimo, kaj je prirezani heksa-oktaeder in vam predstavimo še nekaj drugih zanimivosti o simetriji in poliedrih.

Poliedri

Poliedri so geometrijska telesa z ravnimi mejnimi ploskvami. Nas v projektu zanimajo predvsem poliedri, ki imajo veliko stopnjo simetrije in zato izkazujejo lepoto oblike. Poliedre delimo na konveksne in nekonveksne. Konveksni so tisti, ki nimajo nobenega dela vbočenega oz. matematično: če izberemo poljubni dve točki v notranjosti poliedra in ju povežemo z daljico, mora celotna daljica ležati v notranjosti poliedra. Nekonveksni poliedri so tisti, ki niso konveksni.

Podrobneje si oglejmo konveksne poliedre, ki imajo za ploskve pravilne mnogokotnike. Mednje spadajo platonška telesa, arhimedska telesa, enako-

robe pokončne prizme, enakostranične antiprizme in Johnsonova telesa. Ti razredi poliedrov so med seboj ločeni z izjemo kocke, ki je hkrati platonško telo in enakoroba pokončna prizma, in oktaedra, ki je platonško telo in enakoroba antiprizma.

Platonška telesa so konveksni poliedri, ki imajo za mejne ploskve skladne pravilne večkotnike ene vrste in imajo vsa oglišča enako konfiguracijo.

Platonška telesa so:

- **tetraeder**
omejuje ga 4 enakostranični trikotniki, ki se po 3 stikajo v posameznem oglišču
- **oktaeder**
omejuje ga 8 enakostraničnih trikotnikov, ki se po 4 stikajo v posameznem oglišču
- **ikozaeder**
omejuje ga 20 enakostraničnih trikotnikov, ki se po 5 stikajo v posameznem oglišču
- **kocka ali heksaeder**
omejuje ga 6 kvadratov, ki se po 3 stikajo v posameznem oglišču
- **dodekaeder**
omejuje ga 12 pravilnih petkotnikov, ki se po 3 stikajo v posameznem oglišču

Izrek. *Platonskih teles je natanko 5.*

Dokaz. Namesto strogega matematičnega dokaza bomo naredili bolj intuitiven dokaz. Poglejmo si oglišče A v platonškem telesu, sestavljenem iz samih trikotnikov. V A se lahko stika le 3, 4 ali 5 ploskev. Če bi se v A stikalo 6 ali več ploskev, ta

polieder ne bi bil več konveksen ali pa se ne bi niti dvignil iz ravnine. V mreži bi namreč 6 trikotnikov ob oglišču A zapolnilo ves kot okoli A in konveksnega telesa ne bi mogli narediti.

Če se v A stikajo sami kvadrati ali sami petkotniki, so ti lahko le trije. Iz podobnega razloga kot pri trikotnikih tudi štirje kvadrati ali pravilni petkotniki okoli oglišča A v mreži zapolnijo ves kot in jih ne moremo dvigniti do konveksnega poliedra. Dokazali smo torej, da je platonskih teles največ 5. Ker so tetraeder, oktaeder, ikozaeder, dodekaeder in kocka platonska telesa, jih je natanko 5.

Arhimedska telesa so *polpravilni poliedri*⁷, ki imajo za mejne ploskve ne nujno enake pravilne večkotnike. Takšnih teles je 13.



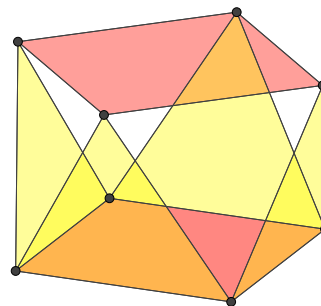
Slika 45 Nekaj arhimedskih teles: zadaj prirezani dodekaeder in prirezani ikozaeder, spredaj prirezani tetraeder, prirezani heksaeder in prirezani oktaeder.

Na sliki 45 je prikazanih 5 prirezanih platonskih teles, ki so tudi arhimedska.

Enakorobe pokončne n -strane prizme so poliedri, sestavljeni iz dveh vzporednih pravilnih n -kotnikov, ki ju povezuje plašč iz n kvadratov.

Enakorobe n -strane antiprizme so poliedri, sestavljeni iz dveh vzporednih pravilnih n -kotnikov, ki ju povezuje plašč iz $2n$ enakostraničnih trikotnikov.

Johnsonova telesa so vsi ostali konveksni poliedri s ploskvami iz pravilnih mnogokotnikov, ki ne sodijo v nobeno od zgoraj naštetih skupin. Teh teles je 92.



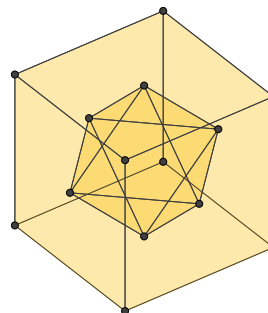
Slika 46 Enakoroba 4-strana antiprizma

Duali poliedrov

Vsakemu konveksnemu poliedru lahko priredimo nov polieder, ki ga imenujemo dual. Oglišča duala ležijo na ploskvah prvotnega poliedra in so povezana tako, da sta sosednji ploskvi originala povezani z robom duala. Dual duala je spet prvotni polieder.

Nekaj zanimivih primerov:

- Dual ikozaedra je dodekaeder,
- Dual tetraedra je tetraeder,
- Dual kocke je oktaeder (slika 47)



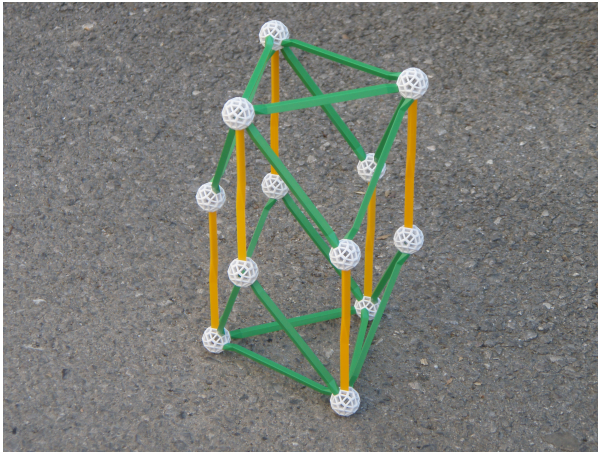
Slika 47 Dual kocke

Trunkacija

Če poliedru odsekamo oglišče, nastane več novih oglišč in stranic, oblika nekaterih ploskev pa se spremeni. Običajno kot prisekani polieder imenujemo polieder, v katerem smo odsekali vsa oglišča. Ta postopek imenujemo trunkacija.

Spomnimo se prirezanega heksa-oktaedra iz uvoda. Heksa-oktaeder je polieder, sestavljen iz 8 enakostraničnih trikotnikov in 6 paralelogramov.

⁷ Polpravilni polieder je polieder, ki ima za ploskve same pravilne mnogokotnike in je njegova grupa simetrij tranzitivna na ogliščih. To pomeni, da za poljubni oglišči A in B obstaja neka simetrija tega poliedra, ki preslika A v B .



Slika 48 Heksa-oktaeder

Če hekso-oktaedru odsekamo vsa oglišča, v katerih se stika 5 robov, dobimo prisekani hekso-oktaeder, katerega oblika je povezana z morebitnimi marsovskimi bakterijami.

Simetrija poliedrov

Natančneje:

Definicija. Izometrija prostora je preslikava prostora samega vase, ki ohranja razdalje med preslikanimi točkami. Simetrija poliedra je taka izometrija, ki telo preslika samo vase, množico vseh simetrij nekega poliedra pa imenujemo grupa simetrij.

Zrcaljenje preko točke

Zrcaljenje kocke preko njenega središča je primer simetrije poliedra. Če telo dvakrat prezrcalimo preko točke, dobimo spet prvotno telo.

Rotacija

Rotacijsko simetrijo imajo telesa, za katera obstaja rotacija, ki jih preslika vase. To si lahko enostavno predstavljamo tako, da vzamemo neko telo in ga zavrtimo okoli osi za določen kot. Za poliedre obstaja le 5 sistemov rotacijske simetrije: ciklična, diedrska, tetraedrska, oktaedrska in ikozaedrska.

Sistemi rotacijskih simetrij:

▷ Ciklična simetrija

je najenostavnejši primer rotacijske simetrije. Telo s ciklično simetrijo ima vsaj eno rotacijsko os. Najdemo jo na primer pri piramidah, zvezdah ...

Izrek. Za vsako rotacijsko os poliedra A obstaja tak najmanjši kot α , da je rotacija za α okoli te osi v grupi simetrij poliedra A in so vse ostale rotacije okoli te osi, ki so v grupi simetrij poliedra A , natanko mnogokratniki rotacije za kot α .

Dokaz. Naj bo y rotacijska os poliedra A in naj bo α tak najmanjši kot, da je rotacija za α okoli te osi v grupi simetrij A . Naj bo rotacija za β okoli y iz grupe simetrij poliedra A in naj bo k najmanjše tako naravno število, da je $k \cdot \alpha + \beta \geq 360^\circ$. Potem velja: $k \cdot \alpha + \beta$ je v grupi rotacij poliedra A okoli osi y in zato $k \cdot \alpha + \beta = 360^\circ$ ali $k \cdot \alpha + \beta \geq 360^\circ + \alpha$. Vemo, da je bil k najmanjši tak, da je $k \cdot \alpha + \beta \geq 360^\circ$. Torej $k \cdot \alpha + \beta = 360^\circ$. Če vzamemo $\beta = 0$, vidimo, da obstaja tak l , da je $l \cdot \alpha = 360^\circ$. Sledi: $\beta = (l - k) \cdot \alpha$.

Definicija. Naj bo A polieder, y os rotacijske simetrije in α rotacija za najmanjši kot okoli te osi. Red osi y je tako najmanjše število k , da je $\alpha^k = id$.

Izrek. Naj bo A polieder, y os rotacijske simetrije reda k in β rotacija okoli y . Potem je $\beta^k = id$.

Dokaz. Obstaja l , da velja $\beta = \alpha^l$. Torej: $\beta^k = (\alpha^l)^k = (\alpha^k)^l = id$.

Diedrska simetrija

Telo A z diedrsko simetrijo ima v grupi simetrij vsaj 2 elementa. Ta dva sta rotacija okoli glavne osi za kot α in rotacija okoli stranske osi, ki je pravokotna na glavno os, za kot 180° . Seveda mora grupa simetrij telesa A vsebovati tudi vse kompozitume teh dveh elementov.

Tetraedrska simetrija

Telo s tetraedrsko simetrijo ima 7 takih rotacijskih osi kot tetraeder. Ta ima:

- 4 osi reda 3, ki gredo iz enega oglišča do sredine nasprotne mejne ploskve,
- 3 osi reda 2, ki gredo skozi sredine nasprotnih robov.

Oktaedrska simetrija

Telo z oktaedrsko simetrijo ima 3 množice takih rotacijskih osi kot oktaeder. Ta ima:

- 3 med seboj pravokotne osi reda 4. Vsaka takšna os gre skozi nasprotni oglišči,
- 4 osi reda 3. Te gredo skozi središča nasprotnih mejnih ploskev,
- 6 osi reda 2. Te gredo skozi središča nasprotnih robov.

Ikozaedrska simetrija

Telo z ikozaedrsko simetrijo ima 31 rotacijskih osi kot ikozaeder. Ta ima:

- 6 osi reda 5, ki potekajo skozi nasprotni oglišči,

- 10 osi reda 3, ki potekajo skozi središča nasprotnih mejnih ploskev,
- 15 osi reda 2, ki potekajo skozi središča nasprotnih robov.

Zrcaljenje

Zraven rotacijske je ena izmed pomembnejših simetrij tudi zrcalna simetrija. Telo ima zrcalno simetrijo, če obstaja ravnina, da zrcaljenje preko te ravnine ohranja telo. Primer zrcalne simetrije pri kvadru je zrcaljenje preko ravnine, vzporedne z dvema ploskvama, ki gre skozi težišče.

Zrcalna simetrija je zelo pogosta tudi v naravi. Tako so na primer človeška, metuljeva, žabina, ribja ... leva in desna polovica telesa zrcalno simetrični. Taki simetriji v biologiji rečemo bilateralna simetrija.



Slika 49 Simetrija v naravi

V vsakdanjem življenju ima simetrija širši pomen. V glasbi smo pogosto priča ponavljanju teme in v Beethovnovi 5. simfoniji hitro opazimo simetrijo. Tudi v drugih zvrsteh umetnosti simetrija igra pomembno vlogo. Za konec navedimo še nekaj primerov: v arhitekturi slaven Eifflov stolp, Tadž Mahal, Stonehenge, pri športu sinhrono plavanje ...

Viri

- [1] *Simetrija*. Online. Citirano 29.8.2008 na naslovu http://torina.fe.uni-lj.si/~izidor/Delavnica/Rotacijska_simetrija.pdf
- [2] *Life on Mars*. Online. Citirano 29.8.2008 na naslovu <http://www.georgehart.com/zomebook/life-on-mars.html>
- [3] *ALH 84001*. Online. Citirano 29.8.2008 na naslovu http://sl.wikipedia.org/wiki/ALH_84001
- [4] *Polieder*. Online. Citirano 29.8.2008 na naslovu <http://sl.wikipedia.org/wiki/Polieder>
- [5] Izidor Hafner. Poliedri. *Logika in razvedrilna matematika*, 16(1), 2006/07.
- [6] Izidor Hafner. Simetrija. *Logika in razvedrilna matematika*, 16(3), 2006/07.

Zlati rez

Nives Naraglav, Saša Drame, Urša Pertot, Dejan Širaj (mentor)

Vrtnica, Taj Mahal, človek, pravilni petkotnik in renesansa morda na videz nimajo skupnih točk. Vendar če združimo moč narave, človekov občutek za estetiko ter matematični um, kmalu dobimo popolno razmerje zlatega reza, ki povezuje na videz nepovezane pojme.

Definicija in osnovne lastnosti

Zlati rez je razmerje, ki ga ponazorimo z razdelitvijo daljice na dva neenaka dela tako, da je razmerje med celoto in daljšim delom enako razmerju med daljšim in krajšim delom.



Število zlatega reza, ki ga ponavadi označimo s Φ , izračunamo neposredno iz definicije:

$$\begin{aligned} \frac{m+M}{M} &= \frac{M}{m} & \Phi_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \frac{m}{M} + 1 &= \frac{M}{m} & \Phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \Phi^{-1} + 1 &= \Phi & \Phi &= 1,61803\dots \\ \Phi^2 - \Phi - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Iz izračuna je očitno, da je Φ algebraično število, saj je rešitev neke enačbe z racionalnimi koeficienti. Poleg tega je tudi iracionalno število, kar je razvidno iz naslednjega premisleka. Denimo, da je Φ element množice racionalnih števil.

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ 2\Phi - 1 &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Ker velja, da množenje racionalnega števila z 2 in odštevanje 1 od racionalnega števila spet dá racionalno število, $\sqrt{5}$ pa je iracionalno število, smo prišli do protislovja in tako dokazali, da je Φ res iracionalno.

Povezanost s Fibonaccijevim zaporedjem

Fibonaccijevo zaporedje je zaporedje števil, ki so

vsota dveh svojih predhodnikov.

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

Tako dobimo števila: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Iz formule za splošni člen Fibonaccijevega zaporedja, ki jo dobimo s pomočjo linearnih rekurzivnih enačb, je lepo razvidna zveza med Fibonaccijevim zaporedjem in številom zlatega reza:

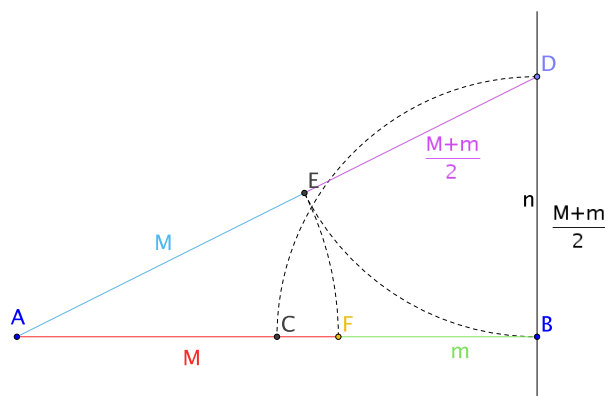
$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \\ F_n &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\Phi^n + (1 - \Phi)^n) \end{aligned}$$

Kvocien dveh zaporednih Fibonaccijevih števil vedno bolj stremi k številu zlatega reza. To trditev formalneje napišemo na naslednji način:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

Konstrukcija zlate točke

Na začetku imamo dano daljico AB z razpoloviščem v točki C . Skozi točko B narišemo pravokotnico in na njej točko D tako, da je $|BC| = |BD|$. Na daljici AD označimo točko E tako, da je $|DB| = |DE|$. Na daljici AB označimo točko F tako, da je $|AF| = |AE|$. Točka F je zlata točka daljice AB .



Dokaz, da je F res zlata točka daljice AB , preprosto izvedemo s Pitagorovim izrekom za trikotnik ABD :

$$\left(\frac{M+m}{2}\right)^2 + (M+m)^2 = \left(M + \frac{M+m}{2}\right)^2$$

$$\frac{m^2 + 2Mm + M^2}{4} + m^2 + 2Mm + M^2 = \frac{9M^2 + 6Mm + m^2}{4}$$

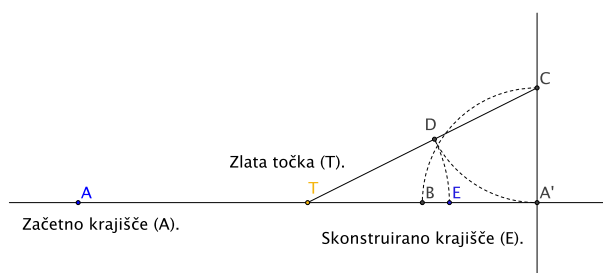
$$M^2 - Mm - m^2 = 0$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Konstrukcija drugega krajišča daljice ob znanem enem krajišču in zlati točki

Dano je krajišče A daljice AE in zlata točka T na njej. Na nosilki daljice AT označimo točko A' tako, da velja $|AT| = |A'T|$. Po prej opisanem postopku skonstruiramo zlato točko E za daljico TA' .



Spodnji račun pokaže, da je točka E iskano drugo krajišče dane daljice:

$$|AT| = |TA'| = a \quad \frac{a}{a-c} = \frac{a-c}{c}$$

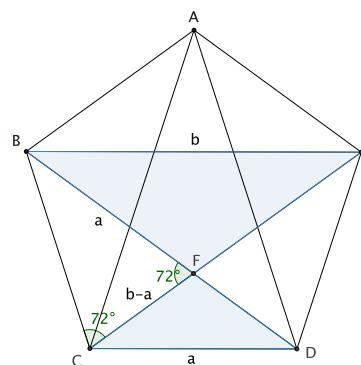
$$|AE| = e \quad \frac{a}{e-a} = \frac{e-a}{2a-e}$$

$$|EA'| = c \quad e^2 - ae - a^2 = 0$$

$$c = 2a - e \quad \frac{a}{e-a} = \frac{e}{a}$$

Zlati petkotnik

V petkotniku zlatih rezov kar mrgoli. Najpomembnejši je tisti med diagonalo in stranico, ki ga bomo v naslednjih vrsticah tudi dokazali.



Petkotnik je pravilen, zato je štirikotnik $BCDE$ enakokraki trapez, od koder sledi, da sta daljici BE in CD vzporedni. Trikotnika BFE in CDF imata torej vse pare stranic vzporedne, zato sta podobna. Ni težko videti, da sta kota $\angle BCF$ in $\angle CFB$ enaka, iz česar sledi, da je trikotnik FBC enakokrak. Preko zgoraj omenjenih podobnih trikotnikov lahko dokažemo, da je razmerje med stranico in diagonalo pravičnega petkotnika enako Φ , na naslednji način:

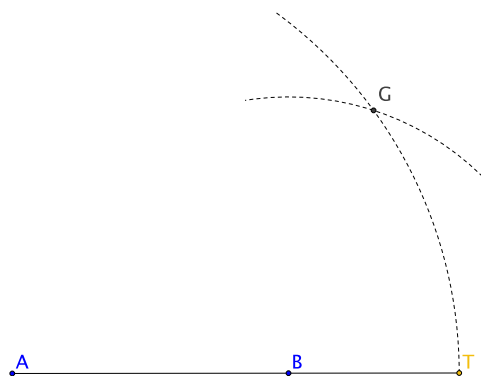
$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$$

$$b^2 - ab - a^2 = 0 \quad z = \frac{b}{a}$$

$$z^2 - z - 1 = 0$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Konstrukcija pravičnega petkotnika



Na začetku imamo dano stranico AB pravičnega petkotnika $ABCDE$. Nato po prejšnjem postopku skonstruiramo točko T tako, da je B zlata točka daljice AT . Ker sta diagonala in stranica pravičnega petkotnika v razmerju zlatega reza, je dolžina daljice AT enaka dolžini diagonale. Zato samo v točki A narišemo krožnico z radijem $|AT|$, v točki B pa krožnico z radijem $|AB|$, in presečišče teh dveh

krožnic predstavlja tretje oglišče C. Ostali točki narišemo po istem postopku.

Zlati rez v umetnosti in naravi

Zlati rez naj bi bilo najboljšo možno vodilo vseh, ki poskušajo lepoto skladno ujeti v sliki ali izklesati v kamnu. Tako ljudje že tisočletja uporabljajo zlati rez v arhitekturi (egipčanske piramide, grški Partenon, Notre Dame, Taj Mahal, CN Tower,...), slikarstvu (predvsem renesančni umetniki), kiparstvu,...

Človek je dobil navdih za zlati rez z opazovanjem narave in samega sebe. Pri človeku ga lahko med drugim najdemo v razmerju med podlahtjo in dlanjo.



Pri rastlinah in živalih gre predvsem za učinkovito izkoriščanje potenciala. Biologi so ugotovili, da rastlina absorbira največ svetlobe, če ima liste okoli stebela razporejene tako, da je med vsakim naslednjim kot $2\pi/\Phi$, to pomeni, da na en obrat pride

Φ listov. Podobno velja za razporeditev semen v cvetu in cvetnih listov, kar prikazuje spodnja fotografija.



Viri

1. Dunlap, R. (1997). The golden ratio and Fibonacci numbers. New Jersey: World Scientific
2. WIKIPEDIA. Online. Citirano 29. avgusta 2008 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
3. Špenko, Š., Kovač, B., Širaj, D. (2004). Zlati rez (raziskovalna naloga). Ljubljana: Gimnazija Bežigrad

Biljard

Matjaž Drolc, Primož Ocepek, Teja Turk, Tine Mezgec (mentor)

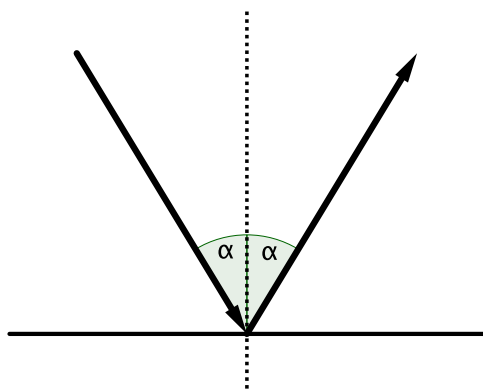
Za začetek ...

Predstavljajte si pravokotno biljardno mizo, na kateri se odbija krogla. Ker smo mladi matematiki veliki idealisti (in znamo rešiti le lahke enačbe), na naši mizi ni trenja in naša krogla se vedno lepo kotali. Seveda se na robu mize odbije tako, kot bi se odbil svetlobni žarek: odbojni kot je enak vpadnemu. Ker naša krogla ves čas ohranja svojo energijo, se nikoli ne ustavi, temveč potuje od enega roba mize do drugega, odvisno od začetnega položaja in smeri.

Kaj pa, če se po mizi na podoben način kotalijo še druge kroglice? Prej ali slej se bosta dve kroglici srečali in se odbili vsaka v svoji smeri. Gibanje večjega števila krogel je lahko zelo kaotično in težko je vnaprej izračunati, kje se bo neka krogla nahajala v točno določenem trenutku. S pomočjo računalnika pa lahko izdelamo animirani model, ki nam omogoča opazovanje trkov krogel na pravokotni mizi v realnem času. To je bil tudi glavni cilj našega projekta.

O matematiki odboja kroglice

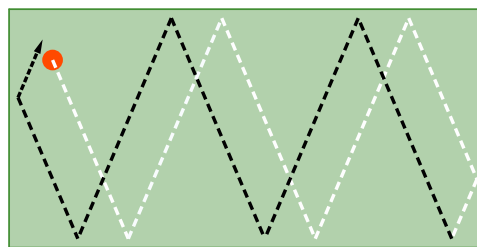
Začnimo seveda z eno samo kroglo. Kot smo ugotovili, je odbojni kot enak vpadnemu. To pomeni, da se središče kroglice po odboju giblje po premici, ki je zrcalna slika tiste pred odbojem glede na pravokotnico na rob mize v dotikališču. Krogla nato nadaljuje pot do naslednjega roba, ki je lahko zadnjemu vzporeden ali pa nanj pravokoten.



Slika 50 Odbojni zakon

Naša biljardna miza nima lukenj. Označimo jo kot pravokotnik $ABCD$. Naj bo α vpadni kot glede na rob AB . Ker pa sta robova AB in CD vzporedna, je tudi vpadni kot glede na rob CD enak α . Poglejmo, kaj se zgodi, ko pride krogla do konca roba AB ali CD in se ne more več odbiti od nasprotnega roba. V tem primeru se začne objati od robov BC in AD . Označimo vpadni kot glede na robova BC in AD z β . Izkaže se, da sta kota α in β komplementarna.

Naša krogla se nikoli ne ustavi. Premice, po katerih se premikajo kroglice, zato tvorijo paralelograme, z notranjimi koti 2α , 2α , 2β in 2β . Dolžina diagonale je v vseh paralelogramih enaka, zato so ti paralelogrami skladni.



Slika 51 Skladni paralelogrami

Nekaj skrivnosti o programiranju

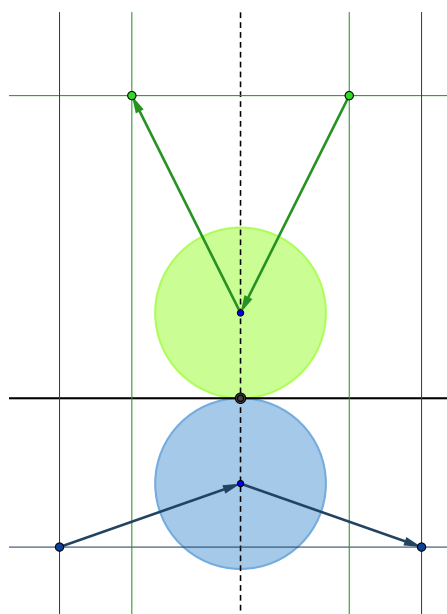
Cilj našega projekta je bil torej izdelati program, ki prikazuje gibanje krogel na biljardni mizi. Izdelali smo ga s pomočjo programskega jezika Java kot applet, ki ga je mogoče vključiti na spletno stran.

Računalniška animacija deluje podobno kot film. Tudi v tem primeru animiramo tako, da zelo hitro menjamo množico sličic, kjer so žoge vsakih nekaj premaknjene. Ker lahko žoge trkajo ob rob in ob podlago, je veliko zelo podobnih situacij. Zato smo pri programiranju uporabili objekte, ki omogočajo večkratno uporabo iste kode ter naredijo program preglednejši. Osnovni uporabljeni objekti so Žoga, Premica in Vektor.

Objekt Vektor omogoča seštevanje in odštevanje ter zrcaljenje čez nek drug Vektor. Poleg tega ga lahko tudi prilepimo na neko Premico, in sicer tako da se x koordinata Vektorja ohrani, koordinata y pa se izračuna s pomočjo enačbe Premice. Enač-

ba Premice se v spominu računalnika shranjuje v eksplicitni obliki. Omogoča računanje pravokotnice in vzporednice skozi neko točko ter računanje presečišča dveh premic v obliki vektorja. Žoga je sestavljena iz Vektorja gibanja ter Vektorja, ki opisuje njeno pozicijo v nekem trenutku. Ker so žoge različnih barv, vsebuje vsaka žoga tudi ta podatek. Njen del je tudi metoda Premakni, ki žogo premakne v smeri gibanja.

Ko se program zažene, najprej ustvari 3 različne Žoge, katerih parametri o položaju, smeri in hitrosti gibanja so naključni. Nato začne gibanje izrisovati s hitrostjo približno 100 sličic na sekundo. Na vsaki Žogi kliče metodo Premakni, nato pa preveri, ali je Žoga trčila ob steno ali pa se je zaletela v kako drugo Žogo. Če je Žoga trčila ob steno, eni koordinati priredimo nasprotno vrednost - pomnožimo z -1 . Če trči ob levo ali desno steno, to storimo s koordinato x , v nasprotnem pa z y . Če pa trčita med sabo dve žogi, je njun odboj nekoliko bolj zapleten. Novo smer žoge izračunamo s pomočjo vzporednic in pravokotnic na tangento v dotikališču žog.



Slika 52 Odboj dveh krogel

Slike smo oblikovali v programu GeoGebra za dinamično geometrijo. Ker je odbojni kot krogle enak vpadnemu kotu, smo si pomagali z zrcaljenji preko premice in tudi preko točke.

Kaj pa uporabnost?

Naš program pa na žalost ni dovolj dober, da bi lahko z njegovo pomočjo oblikovali strategijo za igranje biljarda. Pri izdelavi programa nismo upoštevali dejstva, da se krogle vrtijo tudi okoli svoje osi. Našo nalogo smo še malo poenostavili, zato smo silo trenja zanemarili in se naše krogle gibljejo premo enakomerno. Posledično program ne prikazuje natančnega gibanja biljardne krogle po biljardni mizi.

Program pa lahko simulira gibanje molekul enoatomnega plina. Plin vedno zavzame celotno prostornino posode, v kateri je. Molekule se neprestano premikajo, zato prihaja do medsebojnih trkov in odbojev. Več odbojev kot je, višji je tlak plina.

... in konec

Uspelo nam je ustvariti program, opazovali smo matematično ozadje odbijanja krogle na biljardni mizi.

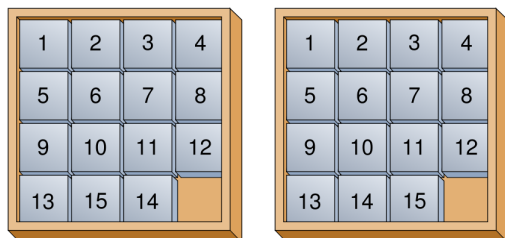
Biljard je zelo široka, na žalost preobširna tema, da bi lahko v tako kratkem času raziskali vse, kar nas zanima. Zanimivo bi bilo poiskati način, kako v n odbojih spraviti kroglo v točno določeno luknjo, ustvariti program, ki bi upošteval silo trenja, krogle pa bi se premikale v prostoru in še in še.

Naučili smo uporabljati programe GeoGebra, Eclipse in ConTeXt.

Igra 15

Blaž Peterlin, Filip Kozarski, Matjaž Leonardis, Nino Bašič (mentor)

Problem



Začetna postavitev

Iskana postavitev

Slika 53 Igralna plošča

V 70. letih 19. stoletja je sestavljalec ugank Sam Loyd ponudil nagrado v višini 1000 \$ tistemu, ki mu uspe rešiti naslednji problem:

Dana je kvadratna tabela velikosti 4×4 . V njej so ploščice oštevilčene s števili od 1 do 15, ena celica pa je prazna. Edina dovoljena poteza je eno od ploščic, ki mejijo na prazno celico, prestaviti na prazno celico.

Poiskati je potrebno zaporedje takih potez, da začetno postavitev (glej sliko 53) spremenimo v postavitev, ki ima po vrsti označena polja od 1 do 15, zadnje polje pa je prazno (na sliki 53 desno).

V tem članku bomo predstavili kriterije, ki nam povedo kdaj je iz neke postavitve ploščic v tabeli možno doseči končno razporeditev (na sliki 53 desno). Takim razporeditvam bomo rekli veljavne. Predstavili pa bomo tudi algoritme, ki nam poiščejo zaporedje premikov, ki poljubno začetno veljavno razporeditev pripeljejo na končno.

O permutacijah

Permutacija π reda n bo za nas bijektivna preslikava $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Zgled za permutacijo reda 5 je npr.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 5\ 4).$$

Prvi zapis pomeni, da je $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 5$, ..., tj. vsako od števil iz prve vrstice se preslika v števi-

lo iz druge vrstice, ki je v istem stolpcu. Drugi je zapis permutacije s cikli. Ti cikli v splošnem niso nujno disjunktni. $\pi(n)$ izračunamo s pomočjo tega zapisa tako, da najprej vzamemo zadnji cikel. Če v njem nastopa n , namesto n -ja vzamemo število, ki je na njegovi desni (ali prvo število v ciklu, če se n nahaja na zadnjem mestu) in naredimo isto še s preostalimi cikli, pri čemer gremo od predzadnjega proti prvemu. Število, ki ga dobimo na koncu, je $\pi(n)$.

Vsako permutacijo je mogoče razstaviti na same transpozicije, tj. na cikle z dolžino 2. V splošnem to naredimo takole:

$$(a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_n) = (a_1\ a_n)(a_1\ a_{n-1})\ \dots\ (a_1\ a_3)(a_1\ a_2).$$

Če je teh transpozicij sodo število, pravimo, da je permutacija soda, sicer je liha. Parnost permutacije lahko ugotovimo še na druge načine, denimo s preštevanjem inverzij.

Vse permutacije reda n tvorijo simetrično grupo, ki jo označimo z S_n . Vse sode permutacije reda n tvorijo podgrupo grupe S_n , ki jo označimo z A_n .

Bralec, ki bi si želel temeljito razumeti dokaze v teoretični obravnavi Igre 15, naj si prebere kaj več o permutacijah in simetričnih grupah.

Rešljivost

Označimo vse celice po vrsti s števili od 1 do 16. Prav tako označimo vse ploščice s števili od 1 do 15. Prazna ploščica nosi število 16. Označimo z a_i ploščico, ki stoji na i -tem polju. Naj bo d minimalno število premikov, ki jih moramo opraviti, da spravimo prazno ploščico na celico 16. Naj bo s število vseh takih parov (i, j) , da velja $i < j$ in $a_i > a_j$. Če zaporedje števil ploščic predstavimo kot permutacijo, potem je s število inverzij, katerega parnost je enaka parnosti permutacije. Tudi parnost števila ciklov dolžine 2 (transpozicije) v ciklični predstavitvi permutacije je enako parnosti permutacije.

Izrek. Iz neke postavitve je možno dobiti končno (slika 53 desno) natanko tedaj, ko je

$$d + s \equiv 0 \pmod{2}$$

Zgornji izrek bomo dokazali v dveh korakih; najprej bomo dokazali, da na noben način ne moremo dobiti postavitve, pri kateri zgornje ne bi veljalo, potem pa pokazali še, da vse, ki ustrezajo zgornjemu kriteriju lahko dobimo.

Lema. *Parnost števila $d + s$ se ohranja.*

Dokaz. V vsaki potezi se lahko prazno polje premakne v eni izmed smeri na sliki. Poglejmo kaj se zgodi s parnostjo $d + s$. Iz slike 2 se zelo lepo vidi, da se d z vsakim premikom spremeni parnost. Če zamenjamo poljubni sosednji ploščici (naj bosta to a_i in a_j), bo novonastala permutacija ravno prejšnja pomnožena s ciklom (a_i, a_j) . Torej se parnost spremeni tudi s . Ker se je spremenila parnost tako d kot s , se parnost njune vsote ni spremenila. ■

Ker je pri začetni postavitvi vsota $d + s$ soda in vemo, da se parnost ohranja, ni dosegljiva nobena postavitve, kjer je vsota $d + s$ liha, torej tudi ne postavitve na sliki 53 levo.

Spodaj je priložena funkcija v Pascalu, ki preveri, ali se neko postavitve da spremeniti v tisto na sliki 53 desno.

Lema. *Iz vsake sode razporeditve lahko dobimo vsako drugo sodo razporeditev.*

Sledeči dokaz je podal Aaron F. Archer leta 1999. Dokazi, ki so jih matematiki predstavili pred njim, so bili obsežni in komplicirani, ker se niso ozirali na izsledke moderne algebre.

Dokaz. Kvadratke na igralni plošči bomo imenovali *celice* (teh je $4 \cdot 4 = 16$), premikajoče koščke pa *ploščice* (teh je 15). Če bo celica prazna, bomo rekli, da je notri *prazna ploščica*. Celice oštevilčimo v obliki kače, kot je prikazano na sliki X. *Postavitve* je bijekcija med celicami in ploščicami (vključno s prazno ploščico). Na postavitvah definiramo ekvivalenčno relacijo in sicer tako, da v en ekvivalenčni razred združimo vse postavitve, ki jih dobimo s pomikanjem prazne ploščice po črtkani črti. Ekvivalenčne razrede bomo imenovali *konfiguracije*, vsa-

ka od njih pa vsebuje 16 postavitve. Konfiguracije bomo označili z $[a_1 a_2 \dots a_{15}]$, kar predstavlja permutacijo pri tisti postavitvi, kjer je prazna ploščica v celici 16 (nje same pa ne vključimo v petmutacijo).

S $\sigma_{i,j}$ označimo permutacijo, ki prazno ploščico premakne z i -tega na j -to mesto (ta mora biti sosednje t -temu). Zanima nas, kako te permutacije delujejo na konfiguracijah. $\sigma_{i,i+1}$ niso zanimive, saj je $\sigma_{i,i+1} = id$ za $n \in \{1, 2, \dots, 15\}$. Ko izločimo še vse odvečne inverzne permutacije, tj. $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}^{-1}$ za vse smiselne $i > j$, nam preostane samo še 9 zanimivih permutacij:

$$\sigma_{1,8} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$$

$$\sigma_{2,7} = (2\ 3\ 4\ 5\ 6)$$

$$\sigma_{3,6} = (3\ 4\ 5)$$

$$\sigma_{5,12} = (5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$$

$$\sigma_{6,11} = (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$$

$$\sigma_{7,10} = (7\ 8\ 9)$$

$$\sigma_{9,16} = (9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$$

$$\sigma_{10,15} = (10\ 11\ 12\ 13\ 14)$$

$$\sigma_{11,14} = (11\ 12\ 13)$$

Če pokazemo, da te permutacije generirajo celo grupo A_{15} , bo to pomenilo, da lahko iz katerekoli konfiguracije dobimo katerokoli drugo konfiguracijo, posledično lahko dobimo iz katerekoli postavitve katerokoli drugo. ■

Lema. *Za vsak $n \geq 3$ cikli dolžine 3 generirajo A_n .*

Lema. *Za vsak $n \geq 3$ cikli $\{(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4), \dots, (n-2\ n-1\ n)\}$ generirajo A_n .*

Lema. *Cikli $\sigma_{1,8}, \sigma_{2,7}, \sigma_{3,6}, \sigma_{5,12}, \sigma_{6,11}, \sigma_{7,10}, \sigma_{9,16}, \sigma_{10,15}$ in $\sigma_{11,14}$ generirajo A_n .*

Viri

1. Aaron F. Archer: A modern treatment of the 15 Puzzle

Funkcija, ki preveri rešljivost neke postavitve pri Igru 15:

```

1 function resljiva(puzzle:array[1..4,1..4] of integer):boolean;
2 var i,j,i1,j1:integer;
3     st_parov,razdalja:integer;
4 begin
5     st_parov:=0;
6     razdalja:=0;
7     for i:= 1 to 4 do
8         for j:= 1 to 4 do
9             begin
10                if puzzle[i,j]=0 then razdalja:=8-i-j;
11                for i1:=i to 4 do
12                    for j1:= j to 4 do
13                        begin
14                            if puzzle[i,j]>puzzle[i1,j1] then st_parov:=st_parov+1;
15                        end;
16                    end;
17                resljiva:= (st_parov+razdalja) mod 2=0;
18            end;

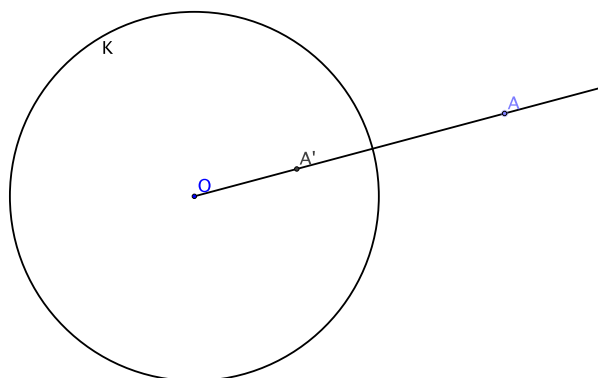
```

Inverzija in Möbiusove transformacije

Matej Aleksandrov, David Kraljič, Nejc Rosenstein, Aleksander Simonič, Gašper Zadnik (mentor)

Uvod

August Ferdinand P. J. Möbius (1790 - 1868), nemški matematik in astronom je znan po rešitvi mnogih matematičnih problemov. Njegovo pomembno delo je Težiščni račun, njegova najbolj znana odkritja pa so Möbiusov trak, Möbiusova funkcija, ničelni sistem ter Möbiusove transformacije.



Osnovni pojmi

Med elementarne Möbiusove transformacije prištevamo:

1. translacijo τ_a ,
2. rotacijo ρ_ϕ ,
3. razteg r_k ,
4. inverzijo i .

Izmed teh štirih transformacij je še najmanj znana inverzija. To je preslikava ravnine nase, ki jo določa enotska krožnica K s središčem O . Pri točki A , ki ni središče prej omenjene krožnice, je njena slika z inverzijo A' , točka na poltraku OA , pri čemer velja:

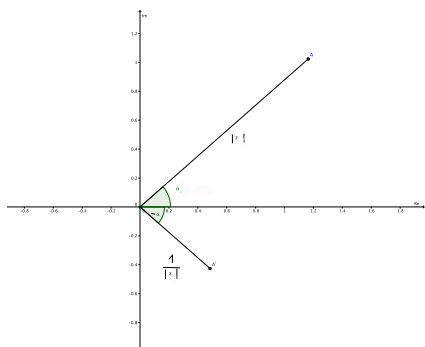
$$|OA| \cdot |OA'| = 1$$

Inverzija se od ostalih transformacij razlikuje tudi po tem, da pri preslikavi lahko zamenja krožnico (v tem primeru L) in premico (p), glede na to, ali vsebujeta središče O enotske krožnice K ali ne.

objekt	slika z inverzijo
$O \in L$	premica
$O \notin L$	krožnica
$O \in p$	premica p
$O \notin p$	krožnica

Te štiri transformacije se v kompleksni ravnini izražajo na naslednji način:

1. $z \rightarrow z + a; \quad a \in \mathbb{C}$
2. $z \rightarrow z(\cos \phi + i \sin \phi) = z \cdot \lambda_\phi; \quad \phi \in [0, 2\pi)$
3. $z \rightarrow z \cdot k; \quad k \in \mathbb{R}$
4. $z \rightarrow \frac{1}{z}$ (glej sliko 54)



Slika 54 Kompleksna inverzija se od geometrijske razlikuje po tem, da je argument slike nasproten argumentu originala.

Operacije z osnovnimi transformacijami

- $z \xrightarrow{r_k} k \cdot z \xrightarrow{\rho_\phi} \lambda_\phi k \cdot z$
- $z \xrightarrow{\rho_\phi} \lambda_\phi \cdot z \xrightarrow{r_k} k \cdot \lambda_\phi \cdot z$

Iz tega je razvidno, da:

$$\rho_\phi \circ r_k = r_k \circ \rho_\phi.$$

- $z \xrightarrow{\tau_a} z + a \xrightarrow{r_k} k \cdot z + k \cdot a$
- $z \xrightarrow{r_k} k \cdot z \xrightarrow{\tau_{ka}} k \cdot z + k \cdot a$

Opazimo, da je:

$$r_k \circ \tau_a = \tau_{ka} \circ r_k.$$

S podobnimi metodami ugotovimo še:

$$\rho_\phi \circ \tau_a = \tau_{\lambda_\phi(a)} \circ \rho_\phi$$

Uvedemo novo operacijo σ_s :

$$z \xrightarrow{\sigma_s} s \cdot z; \quad s \in \mathbb{C}.$$

S tem pokažemo:

$$z \xrightarrow{\sigma_s} s \cdot z \xrightarrow{i} \frac{1}{s \cdot z},$$

$$z \xrightarrow{i} \frac{1}{z} \xrightarrow{\sigma_{\frac{1}{s}}} \frac{1}{s \cdot z},$$

ter

$$i \circ \sigma_s = \sigma_{\frac{1}{s}} \circ i.$$

Za izpeljavo Möbiusove transformacije uporabimo kompozitume vseh zgornjih transformacij. Pri pogojih $s \neq 0; a, b, c \in \mathbb{C}$ dobimo

$$\tau_b \circ \sigma \circ i \circ \tau_a;$$

$$z \xrightarrow{\tau_b} z + a \xrightarrow{i} \frac{1}{z+a} \xrightarrow{\sigma} \frac{s}{z+a} \xrightarrow{\tau_b} \frac{s}{z+a} + b = \frac{s+bz+ab}{z+a} = \frac{bz+c}{z+a},$$

in

$$\tau_a \circ \sigma$$

$$z \xrightarrow{\sigma} s \cdot z \xrightarrow{\tau_a} s \cdot z + a.$$

Na podlagi tega zapišemo definicijo Möbiusove transformacije:

$$M = \left\{ f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} g : z \rightarrow \frac{bz+c}{z+a}; \\ f : z \rightarrow s \cdot z + a; \end{array} a, b, c, s \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dokazovanje grupne strukture

Za dokaz, da so Möbiusove transformacije grupa, je treba preveriti 4 kriterije.

Na začetku smo preverili, če v njih velja asociativnost. To pomeni, da mora za vsak element a in b in c iz grupe veljati:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

V našem primeru dokaz za asociativnost sledi že iz asociativnosti kompozituma splošnih preslikav $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Naslednji pogoj je, da mora operacija biti notranja. To pomeni, da za vsak element a in b iz množice transformacij mora veljati

$$a \circ b = c,$$

kjer je tudi c iz te množice.

S preprostim računom tako preverimo 4 različne kombinacije med obema vrstama formul transformacij $f(z)$ in $g(z)$.

Za grupo transformacij je nujno potreben obstoj identitete, torej mora obstajati taka enota e , da za vsak a iz te grupe velja:

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

V našem primeru velja, da je $e(z) = z$.

Vsaka transformacija (a) mora imeti svoj inverz, oziroma mora obstajati tak element b iz množice transformacij, da je:

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Z uporabo obeh osnovnih formul za Möbiusove transformacije izpeljemo:

$$f \circ f^{-1}(z) = e(z);$$

$$(s_1(s_2z + a_2) + a_1) = s_1(s_2z + a_2) + a_1 = z;$$

$$z(s_1s_2 - 1) + (s_1a_2 + a_1) = 0.$$

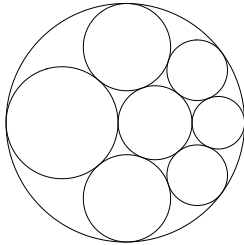
Dobimo:

$$s_2 = \frac{1}{s_1} \quad \text{in} \quad a_2 = -\frac{a_1}{s_1}$$

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{s_1}z - \frac{a_1}{s_1}$$

Za $g(z) = \frac{bz+c}{z+a}$ dobimo inverz: $g^{-1}(z) = \frac{-az+c}{z-b}$.

Primer uporabe inverzije



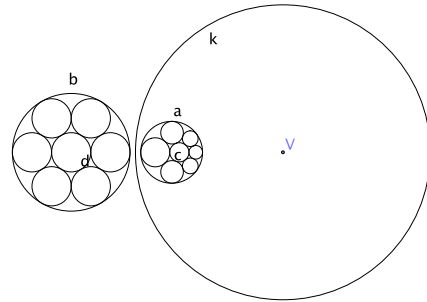
Imamo dano krožnico c s polmerom r_2 , ki leži znotraj krožnice a (polmer r_1) in se da v kolobar med krožnicama vrtati zaporedje večih krožnic, ki se

vse dotikajo tako krožnice a kot tudi krožnice c ter se medsebojno dotikajo. Tedaj se to da narediti neodvisno od izbire začetne krožnice v kolobarju.

Poiskati hočemo središče inverzije, ki krožnici a in c preslika v koncentrični krožnici. Razdaljo med središčema krožnic označimo z v , med središčem enotske krožnice z oznako k in krožnice c pa z $x+r_2$. Središče enotske krožnice je na premici, ki povezuje središči a in c , x pa se izraža kot rešitev kvadratne enačbe:

$$(2v) \cdot x^2 + (2r_1^2 - 2r_2^2 - 2v^2 + 4vr_2) \cdot x + (2r_2r_1^2 + 4r_2^2v - 2r_2v^2 - 2r_2^3) = 0.$$

Zdaj, ko smo ugotovili koordinate središča enotske krožnice, je preostanek naloge povsem enostaven. Vse kar preostane, je namreč le preslikava krožnic iz kolobarja med a in c v kolobar med b in d . Ker sta b in d koncentrični, je vseeno, kje izberemo prvo krožnico v kolobarju med njima.



Slika 55 Rešitev

Viri

1. Tristan Needham (1997). Visual Complex Analysis. Oxford.

MARsovski blog 2007

ponedeljek, 27. avgust

Medtem, ko so se ostali vrstniki v zadnjem tednu počitnic že rahlo dolgočasili, smo nekateri zbrali pogum in se odločili za polet na MARS. Ideja se je slišala privlačno in razburljivo – le malokdo se lahko pohvali, da je že bil na MARSu. A pred odhodom pravzaprav nisem vedel, kaj lahko pričakujem. Se bodo tam zbrali sami geniji, ki se v prostem času ukvarjajo izključno s še neraziskanimi matematičnimi problemi? Ali pa bo ostalo mogoče kaj časa tudi za druženje in igre? Odgovor sem dobil že ob prvem srečanju z drugimi MARsovci na vlaku za Koper. (Boris)

ponedeljek, 27. avgust

Najprej smo si morali natančno ogledati teren. Z žogo v roki smo se podali na plažo in se prepustili užitku na soncu in v vodi. Ležernim trenutkom je sledilo predavanje dr. Dragana Marušiča, na katerem smo začutili delovni duh prihajajočega tedna. Zvečer smo si ogledali izsledke prejšnjih odprav na Mars in na spoznavnem večeru je vsak povedal kaj zanimivega o sebi. Hkrati smo se razdelili v skupine in se seznanili s svojimi nalogami oziroma vsaj z njihovimi zapletenimi naslovi. Noč je nato radovedneže pripeljala nazaj na raziskovalni teren in čeprav je bilo že temno, se voda še ni ohladila, vrtljak nehal vrteti ali tobogan nehal drseti. (Anja)

torek, 28. avgust

Popoldan je na MARSu pristala celo ekipa TV Slovenija, a večina MARsovcev se je snemanja nekoliko izogibala. Tako so se morali zadovoljiti s posnetki zaspanih MARsovcev pri delu z računalniškim programom Geogebra ter tremi intervjuji (od tega je bil eden kapitanov). S snemanjem so nas pri delu motili skoraj dve uri, nastali dvominutni prispevek pa je v dnevnih poročilih širni Sloveniji omogočil vpogled v naše raziskovalne dogodivščine. Zvečer nas je čakalo predavanje dr. Petra Šemrla, ki se je že drugo leto zapored na MARS pripeljal kar z motorjem (glede vesoljskih potovanj NASA očitno dela iz muhe slona). Njegovo predavanje se je končalo z nadvse razgreto debato. (Peter)

četrtek, 30. avgust

Zvečer sta Miha in Anja pripravila fotoreportažo z matematične olimpijade v Vietnamu. Od dogodivščin izbranih slovenskih mladih matematikov mi je ostalo v spominu predvsem okušanje vietnamske tradicionalne pijače, v kateri so potopljene kače. Tekmovanja študentov v Bolgariji pa se je udeležil naš mentor Uroš. Ob njegovem duhovitem pripovedovanju smo se zabavali ob prigodah iz tekmovanja in se čudili, da so tekmovalci bivali skupaj s sestavljalci nalog, kar je na srednješolski olimpijadi strogo prepovedano. Nazadnje nas je mentorica Katja povedla še v Go, tisočletja staro kitajsko igro črnih in belih kamenčkov, ki je mnoge takoj navdušila. Ostali pa s(m)o kljub pozni uri z veseljem ugotovili, da na svetu še vedno obstajajo tudi Tarok in Kantanci ... (David)

petek, 31. avgust

Čeprav so bili naši projekti že skoraj končani, so nam nepogrešljivi mentorji v petek predlagali še veliko popravkov in izboljšav. Načrti o popoldanskem ležanju na plaži so tako (namesto nas) splavali po vodi in še ves dan smo preurejali enačbe ter obupovali nad izgubljenimi slikami. A končni pogled na raznobarvne plakate je vse to odtehtal, čeravno spet ni šlo brez zapletov. Takoj, ko smo na ogled postavili svoj plakat o Bézierjevih krivuljah, smo nasmejani ugotovili, da smo gospodu Bézierju pripisali poklic avtomobilista namesto avtomobilskega inženirja. »Luna obkroži Zemljo v 26-ih dneh, drži ali ne drži?« pa je že eno Uroševih vprašanj iz kviza Male sive celice. V finalu kviza je ekipa dijakov premagala mentorje in ob čipsu in kokicah je minil zaključni večer na MARSu, ne pa še tudi zadnja noč. Avtomat za kavo si je od prihajajočega jutra precej obetal ... (Polona)

sobota, 1. september

Sobota se je začela v polsnu s pospravljanjem nereda, ki se je v skladu z zakonom o entropiji nakopičil čez teden. Pakiranje prtljage nas je malce zbudilo in v nekoliko bolj optimalnem stanju smo se lotili še zadnjih popravkov naših predstavitev. Preostali urici sta minili kot bi trenil in v predavalnici so se že zbirali poslušalci – predvsem naši starši. Po kapitanovem nagovoru in uvodni videošpici s fanfarami v slogu ZF filmov je vsaka skupina predstavila svoj MARsovski matematični problem, ki ga je bilo potrebno rešiti za srečen razplet vesoljske pustolovščine. Pri tem smo bili očitno uspešni in čisto na koncu smo mehko pristali na slovenski obali s sladoledom v roki. (Aljaž)

nedelja, 2. september

Potem, ko nekaj časa živiš v vesolju, je povratek na Zemljo težek. Preživetje na MARSu je odvisno od povezanosti skupine, povezave z Zemljo so pretrgane, težko je razložiti dneve od noči. Po tednu, preživetem z matematiki (ki so posebni ljudje), daleč stran, v idealnih razmerah (poleti na morju), pa vedno pride čas, ko je treba nazaj. Zvečer doma odložiš kovček, izbrskaš ščetko, se odpraviš spat (primanjkuje ti vsaj 15 ur spanja). Zbudiš se opoldan, v sobi si sam in naslednji dan te (po dolgih počitnicah) čaka šola. A kaj hočemo – lepi spomini ostanejo! Z navdušenjem še nekaj časa vsem pripoveduješ o tvojih doživetjih in čas do naslednjega vzleta slejkoprej mine. Se že veselim! (Maja)



Gremo na MARS 2008!

Urša Pertot, Gimnazija Kranj

Predstavljam si, da bi zadnji teden poletnih počitnic preživel tako, da bi hodil na matematična predavanja. Da bi težko prislužene počitnice zapravljal za računanje in dokazovanje stvari, ki jih »itak nikjer v lajfu ne boš rabu«. Travmatično, kajne? No, če tako misliš, se hudo motiš. Kaj takega še zdaleč ni grozno ...

Letos je že tretje leto zapored v Kopru potekalo Matematično raziskovalno srečanje ali na kratko MARS. Njegov namen je bil, da bi srednješolcem, ki imajo radi matematiko, omogočili, da nadgradijo svoje znanje, raziskujejo, dobijo vpogled v delo matematikov (ki, verjeli ali ne, niso samo profesorji na gimnazijah), spoznajo nove prijatelje in seveda uživajo.

Kapitan poleta na MARS je bil tudi letos mag. Boštjanu Kuzman, ki se je odlično spoprijel z organizacijo in pripravo strokovnega programa ter izbiro posadke. Pri izvedbi mu je pomagala posadka študentov v sestavi Katja Berčič, Mojca Miklavec, Dejan Širaj, David Gajser, Nino Bašič, Peter Lendero, Gašper Zadnik in Tine Mezgec. Študentje so bili naši mentorji pri pripravi projektov, ves teden pa so tudi skrbeli, da nam nikoli ni bilo dolgčas.

Tekom tedna so nam predavali tudi štirje priznani matematiki, med njimi dr. Štefko Miklavič (Kode za odkrivanje in odpravljanje napak), dr. Klavdija Kutnar (Fulereni - kjer kemija sreča matematiko), dr. Primož Šparl (Preštevanje s pomočjo grup). Kot zadnji predavatelj je nastopil prof. dr. Peter Šemrl (Racionalna in iracionalna števila: katerih je več?), ki se je zaradi nas v Koper pripeljal že tretje leto zapored, njegovo predavanje pa je prišlo poslušat celo nekaj bivših MARSovcev, ki se letošnjega MARSa sicer niso uradno udeležili.

Naš polet na MARS se je začel v nedeljo 24. 8. 2008, ko smo vsi srečno (večinoma z vlakom) prispeli v Koper. Vsega skupaj se nas je zbralo 7 MARSov in 11 MARSovcev iz vse Slovenije. Najprej so nas namestili v Dijaškem domu, večerji pa je sledil spoznavni večer, imenovan Vzlet. To ni bilo klasično spoznavanje v stilu „jaz sem ta in ta“, ampak bolj nekakšen kviz, skozi katerega smo zvedeli nekaj o naših nenavadnih željah, ciljih, navadah (da na primer kakšen MARSovec ne mara brati, da je drugi napisal rock opero, tretji rad gleda sinhrono plavanje, četrti ne posluša hrupa (techno, rap, ...)). Uradno je sledilo spanje, neuradno pa: no...druženje:)

Naslednja dva dni smo več ali manj preživeli v predavalnici in računalnici, kjer smo spoznavali lastnosti grup in simetrije, računali s permutacijami in izometrijami, malo programirali in izdelali nekaj zanimivih matematičnih modelov s pomočjo programa GeoGebra. Vmesni prosti čas pa smo zapolnili z reševanjem

logičnih nalog na plaži (beri kopianjem), sestavljanjem Zome konstrukcij, obiskom Centra eksperimentov, spajanjem (treba je bilo nadoknaditi noči), igranjem iger go, šah, tarok, Risk, Katanci...

Na MARSu smo priredili celo olimpijski večer. Kar nekaj MARSovcev se je že udeležilo matematične, fizikalne, računalniške ali celo lingvistične olimpijade. Ob fotografijah so nam sproščeno predstavili svoja doživljanja, dodatno spodbudo za raziskovanje pa smo dobili tudi ob predstavitvi Aleksandrove raziskovalne naloge o matematiki starih civilizacij.

Sreda je bila dan za sprostitev, saj smo odleteli v Izolo na Veliko MARSovsko avanturo. V bistvu je bil to nekakšen orientacijski pohod, kjer si na kontrolnih točkah reševal sudoku, množil permutacije, definirali pojem grupa, sestavljal hiško, ... Prvo mesto je za las osvojila ekipa Moment, zato smo ji ostali naklonili en Hala-bala poklon. Moja ekipa Bodi točka! je s stilom osvojila 3. mesto.

Zadnja dva dneva smo se razdelili na skupine po 3 in delali na projektih. Na izbiro smo imeli več tem – poliedre, bilijard, uganko 15, hiperkocke, Moebiusove transformacije, meni osebno pa je bil najbolj všeč zlati rez, katerega omenja tudi Dan Brown v Da Vincijevi šifri. Projekti so nam vzeli kar cel četrtek (no, eni so šli vmes še v kino) in petek, saj smo jih morali spisati v (za moje pojme) geekovskem jeziku ConTeXt. Končne izdelke si lahko pogledate na spletni strani www.mars2008.si.

V soboto smo le še pripravljali predstavitev, imenovano Pristanek, ki smo jo ob vrnitvi na Zemljo pripravili za starše. Tako kot večina naših aktivnosti je predstavitev potekala na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije v Kopru. Po opravljenem zdravniškem pregledu (večina MARSovcev je preživela) smo v veliki predavalnici končno pozdravili domače Zemljane. Da bi bolje razumeli naše delo, smo jim po uvodnih fanfarah predstavili naše projekte.

Ob koncu predstavitve sta nekaj besed dodala še kapitan poleta Boštjan in pa predsednik DMFA Slovenije g. Milan Hladnik. Sledila je še kratka pogostitev in dolgo poslavljanje. Po celem tednu dogodivščin smo se težko ločili od novih prijateljev, vendar nas je tolažila misel, da se vidimo naslednje leto. Tako se je uradno zaključil že tretji MARS, vendar se naše raziskovanje po veselju nadaljuje.

Upam, da ste dobili malo boljše predstavo o tem, da obstajajo tudi načini, ko je matematika lahko zabavna. Verjamem, da večina še vedno misli, da smo obrisani, da se prostovoljno udeležimo česa takega, a če ne drugega, je to odlična priložnost za sklepanje prijateljstev.

Izvedbo programov MARS 2006, 2007 in 2008 so omogočili:



UP FAMNIT – Fakulteta za matematiko,
naravoslovje in informacijske tehnologije

UP PeF – Pedagoška fakulteta Koper

