Kako narisati bicikl

Matej Roškarič (Srednja elektro-računalniška šola, Maribor)
Jana Vidrih (Gimnazija Ptuj)
Mentor: *David Gajser* (Fakulteta za matematiko in fiziko UL)

Kolo vsi poznamo. Ima dve kolesi, ogrodje, pedala, zvonec, luč in odsevnike, ima zavore ter še marsikaj drugega. Sestavne dele lahko opišemo tudi matematično. Izbrali smo si nekaj enostavnih primerov. Parametrizirali smo valj, ki predstavlja ogrodje, torus kot zračnico in paraboloid, sprednjo luč. Prav tako smo pogledali, kakšno krivuljo opiše odsevnik na zadnjem kolesu in točka na obodu kolesa. Vse skupaj smo začinili še z zanimivo, poučno in matematike polno animacijo.

1 Cikloida

Vzemimo, da se kolo (krožnica) s polmerom r brez drsenja kotali po ravni podlagi. Pri tem točka na obodu kolesa opiše krivuljo, ki ji rečemo cikloida. Njena enačba je parametrično podana z $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$.

Slika 1: Cikloida

Krivulja, ki jo opiše odsevnik na zadnjem kolesu, pa izgleda takole:

Slika 2: Krivulja odsevnika

2 Ploskve pri kolesu

Kot smo povedali že v uvodu, na kolesu najdemo veliko enostavnih ploskev, kot so: valj, torus in paraboloid. Vse te ploskve so tudi rotacijske, kar pomeni, da jih dobimo z rotacijo krivulje okoli dane osi.

2.1 Splošno o ploskvah

Ploskve lahko podamo implicitno, eksplicitno ali parametrično. Poglejmo si zapise na dveh enostavnih primerih: krogli in ravnini.

- IMPLICITNO
  Ploskev implicitno podamo s predpisom $h(x, y, z) = 0$.
  Krogla: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
  Ravnina x-y: $z = 0$.

- EKSPLICITNO
  Ploskev eksplicitno podamo s funkcijo $f(x, y)$. Za točke na naši ploskvi potem velja $z = f(x, y)$.
  Krogle tako ne moremo podati, saj je pri eksplicitno podani ploskvi z z x in y enolično določen, kar pa ne velja za kroglo. Zapišemo lahko le polsferi: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
  Ravnina x-y: $f(x, y) \equiv 0$.

- PARAMETRIČNO
  Ploskev parametrično podamo s funkcijami $x(t_1, t_2)$, $y(t_1, t_1)$, $z(t_1, t_2)$.
  Krogla: $(R\cos t_1 \cos t_2, R\cos t_1 \sin t_2, R\sin t_1)$.
  Ravnina x-y: $(t_1, t_2, 0)$.

Za lažjo predstavo ploskve si pogosto pomagamo s koordinatnimi krivuljami:

Definicija. *Naj bo parametrizacija podana z $x(t_1, t_2)$, $y(t_1, t_2)$, $z(t_1, t_2)$. Potem so* koordinatne krivulje *tiste krivulje na ploskvi, na katerih je en izmed parametrov konstanten.*

Na primeru sfere, parametrizirane kot zgoraj, za koordinatne krivulje tako dobimo vzporednike in poldnevnike, saj t_1 in t_2 predstavljata zemljepisno širino in dolžino. Pri konstantnem t_1 dobimo vzporednike, pri konstantnem t_2 pa poldnevnike.

V zgoraj parametrizirani x-y ravnini so koordinatne krivulje kar vzporednice z x in y osjo.

2.2 Rotacijske ploskve

Rotacijska ploskev je ploskev, ki jo dobimo z rotacijo krivulje v x-z ravnini okoli z-osi. Če je krivulja v x-z ravnini podana z $(x(t_1), z(t_1))$, je parametrični zapis rotacijske ploskve naslednji: $(x(t_1)\cos t_2, x(t_1)\sin t_2, z(t_1))$

Izrek. *Koordinatne krivulje na rotacijski ploskvi pri konstantnem parametru t_1, so krožnice s središčem na z-osi in polmerom $x(t_1)$, ki so vzporedne x-y ravnini.*

Dokaz. Pri konstantnem t_1 je tudi z-koordinata konstantna. Torej je koordinatna krivulja vzporedna x-y ravnini. $(x(t_1)\cos t_2, x(t_1)\sin t_2)$ pa je ravno parametrično podana krožnica s središčem $(0, 0)$ in polmerom $x(t_1)$. □

Parametrizirajmo še ploskve kolesa:

- TORUS – zračnica: $((R\cos t_1 + a)\cos t_2, (R\cos t_1 + a)\sin t_2, R\sin t_2)$
  Dobimo ga z rotacijo premaknjene krožnice.

- VALJ – ogrodje kolesa: $(a\cos t_2, a\sin t_2, t_1)$
  Dobimo ga z rotacijo premice, vzporedne z-osi.

- PARABOLOID – luč: $(t_1\cos t_2, t_1\sin t_2, t_1^2)$
  Dobimo ga z rotacijo parabole.

3 Konstrukcija kolesa v Geogebri

S pomočjo računalniškega programa GeoGebra, ki združuje algebro in geometrijo, smo ustvarili model kolesa, ki se premika po premici.

Celotno kolo je sestavljeno iz različnih matematičnih objektov. Definirane so le tri neodvisne spremenljivke: prestava kolesa (p), kot zasuka prednjega zobnika (α) in polmer kolesa (R). Ohišje kolesa je sestavljeno iz mnogokotnikov, kolesa so krožnice, uporabili smo tudi parabolo za obliko luči in pravilni šestkotnik za zobnik. Hitrost vrtenja obeh koles je odvisna od kota α in prestave p. Ko se sprednji zobnik zasuče za α, se kolesi zasučeta za $p \cdot \alpha$. Ker kolo ne udrsava, se pri tem premakne za $R \cdot \alpha \cdot p$.

V animaciji smo narisali tudi sonce in oblak. Za primerno hitro spreminjanje teh dveh objektov smo uporabili funkcijo sinus. Zakaj? Je omejena in periodična funkcija. Periodo enostavno spreminjamo s koeficientom k, amplitudo pa s koeficientom A v $A \cdot \sin(k \cdot \alpha)$.

Literatura

[1] M. Razpet: *Ravninske krivulje*. DMFA, Ljubljana, 1998.