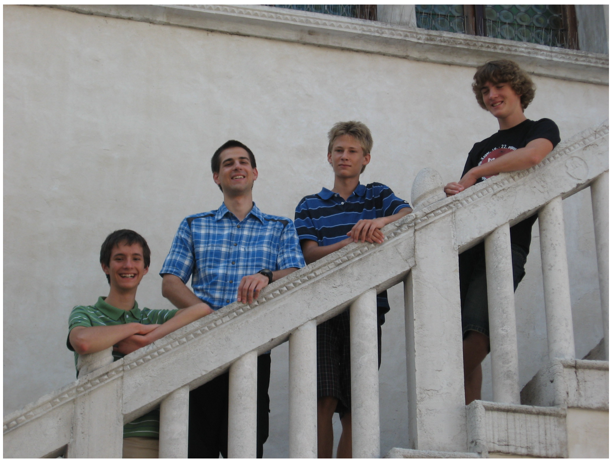
Ko neskončen obseg oklepa končno ploščino

Primož Mekuč (Zavod sv. Stanislava, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana)
Nicola Pinzani (Licej Franceta Prešerna, Trst)
Mihael Simonič (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana)
Mentor: *Dejan Široj* (Fakulteta za matematiko in fiziko UL)



Če si želimo nekaj podrobno pogledati, navadno uporabimo boljšo povečavo. Pa je sploh mogoče, da tudi pri poljubno veliki povečavi podrobnosti ne izginejo? V članku vas bomo prepričali, da taki objekti obstajajo. Še več, imajo tudi izredno zanimive lastnosti (necela dimenzija, neskončno dolga krivulja oklepa končno ploščino) in so presenetljivo uporabni, npr. za stiskanje fotografij.

1 Kaj so fraktali

Fraktali so *samopodobni* geometrijski objekti. To pomeni, da se vzorec ponavlja pri poljubno veliki ali majhni povečavi; povedano drugače, objekt je sestavljen (iz približno ali popolnoma enakih) kopij samega sebe. Fraktale torej lahko poljubno mnogokrat povečamo, podrobnosti pa se ohranjajo.

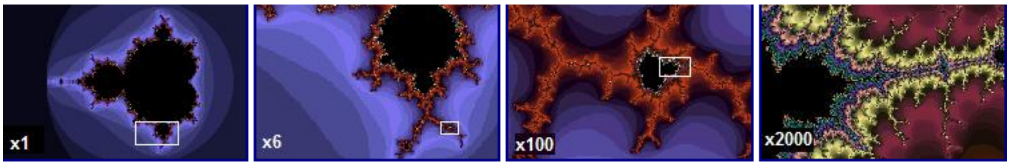
Poleg tega za fraktale veljajo še druge lastnosti:

- so preveč nepravilne oblike za opis z običajnimi geometrijskimi prijemi, čeprav so pogosto zelo simetrični;
- njihova fraktalna dimenzija je večja od topološke razsežnosti;
- so določeni rekurzivno.

Prvič je izraz *fraktal* uporabil Benoit Mandelbrot in izhaja iz latinske besede *fractus*, ki pomeni *nepravilen* oz. *razbit*.

2 Primeri v naravi

Fraktalna geometrija je matematična idealizacija. Fraktali v naravi so zapleteni, vendar jih ne moremo povečevati v neskončnost; razblinijo se najkasneje na velikostni stopnji



Slika 1: Primer sampodobnosti na *Mandelbrotovi množici* (Vir: `http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal`)

atoma. Fraktali v matematiki so enolično določeni in se nikoli ne razblinijo, ne glede na to, kako od blizu jih gledamo.

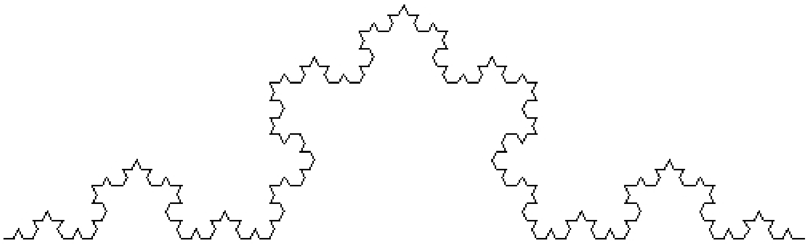
Med fraktale v naravi spadajo gore, oblaki, drevesa in grmi ter veliko ostalih rastlin, na primer cvetača in praprot. Tudi brokolijevo obliko bi lahko označili kot fraktal; vsaka glavica je sestavljen iz niza manjših brstičev, urejenih v logaritemski spirali.

Slika 2: Fraktalna oblika brokolija (Vir: `http://en.wikipedia.org/wiki/Romanesco_broccoli`)

Obala je prav tako lep primer fraktala. Na zemljevidu je videti nezapletena. Tudi če jo na zemljevidu skušamo izmeriti z merilom v velikosti konice svinčnika, še pride do napak. Če se približamo, odkrijemo še dodatne podrobnosti (na primer manjše zalive in rtiče) in če vključimo še te zavoje, izmerjena dolžina obale močno naraste. Čim bolj podroben je zemljevid, tem daljša se zdi obala. Avstralska obala je odličen primer za razlago neskončnosti fraktalne črte.

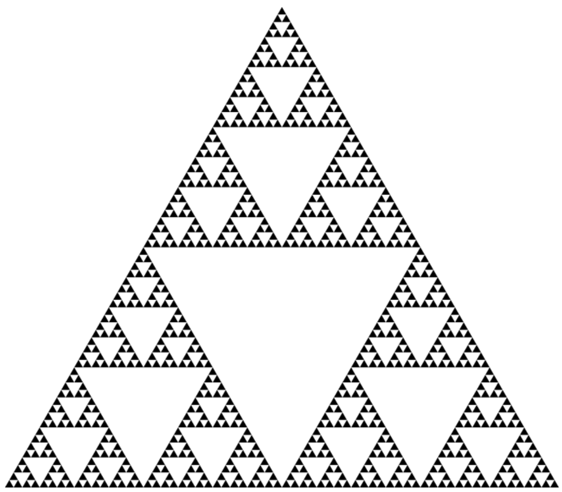
3 Primeri v matematiki

Kochova snežinka je eden prvih odkritih fraktalov. Leta 1904 jo je opisal Niels Fabian Helge von Koch v članku *O zvezni krivulji brez tangente, dobljeni z elementarno geometrijsko konstrukcijo.* Posebej zanimivo je to, da je njena dolžina neskončna, oklepa pa končno ploščino, kar bomo dokazali v naslednjem poglavju. Konstrukcija je sila preprosta. Za osnovo vzamemo enakostranični trikotnik s stranico a; nadalje vsako stranico razdelimo na tri enake dele, srednjega izbrišemo in nad njim narišemo dve stranici enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice $a/3$ (tako dobimo šestkrako zvezdo) ter nato postopek ponavljamo na vsaki stranici neskončnokrat.



Slika 3: Manj znana Kochova krivulja, ki je enaka Kochovi snežinki, le da se namesto z enakostraničnim trikotnikom začne z daljico

Trikotnik Sierpinskega je fraktal, poimenovan po poljskem matematiku Wacławu Sierpińskem, ki ga je opisal leta 1915. Prvotno zgrajen kot krivulja je eden izmed osnovnih primerov matematično ustvarjenega vzorca, ki ga je mogoče reproducirati na kateri koli povečavi. Za osnovo si vzamemo trikotnik in povežemo razpolovišča stranic. Dobimo štiri trikotnike in srednjega odstranimo. Potem postopek ponovimo na vsakem trikotniku, ki ostane. Po neskončno mnogo korakih pridemo do trikotnika Sierpinskega, ki je brez ploščine (ploščino izračunamo po naslednji formuli: $p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, pri čemer je n število korakov).



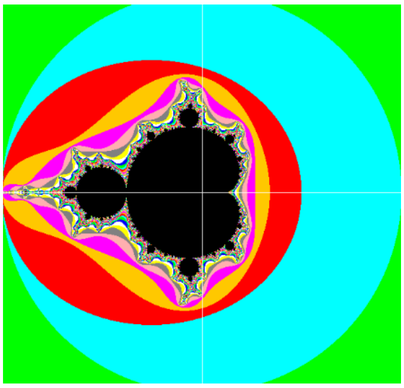
Slika 4: Trikotnik Sierpinskega (Vir: `http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle`)

Cantorjeva množica je fraktal, ki ga je opisal nemški matematik Georg Ferdinand Cantor. Cantorjeva množica je določena z neprestanim odstranjevanjem srednje tretjine daljice. Začnemo z enotskim intervalom $[0, 1]$ in odstranimo njegovo srednjo tretjino. Ostane $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. V neskončnem koraku odstranimo vse „srednje tretjine“ preostalih odsekov. Cantorjeva množica vsebuje vse točke iz intervala $[0, 1]$, ki jih nismo odstranili v tem neskončnem procesu.

Mandelbrotova množica je množica točk v kompleksni ravnini, poimenovana po francosko-ameriškem matematiku Benoîtu Mandelbrotu. Slika je dobljena z iteracijami kompleksne

Slika 5: Cantorjeva množica (Vir: `http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set`)

kvadratne enačbe $z_n = z_{n-1}^2 + c$, pri čemer je z kompleksno število, n števec ponavljanj in c konstanta, izračunana za vsako točko posebej, ki določa barvo. Mandelbrotova množica je tesno povezana z Juliajevimi množicami, saj je iterativna[1] funkcija enaka. Vsaki točki v kompleksni ravnini ustreza ena Juliajeva množica. Tako lahko obravnavamo Mandelbrotovo množico kot indeks Juliajevih množic.



Slika 6: Mandelbrotova množica

4 Ko neskončen obseg oklepa končno ploščino

Prikličimo si v spomin Kochovo snežinko iz prejšnjega poglavja. Poglejmo si najprej njeno dolžino.

$$\begin{aligned} o_0 &= 3a \\ o_1 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3a \\ o_2 &= \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 \cdot 3a \\ &\cdots \\ o_n &= \left(\tfrac{4}{3}\right)^n \cdot 3a \end{aligned}$$

Dolžino seveda izračunamo tako, da naredimo limito dolžine na n-tem koraku:

$$o = \lim_{n\to\infty} o_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3a \right) = 3a \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

[1] Iteracija je računanje, pri katerem se ponavlja vstavljanje približnega rezultata, da se s tem približuje pravemu rezultatu.

Dolžina Kochove snežinke je neskončna, ker je faktor (tj. $\frac{4}{3}$), za katerega se poveča na vsakem koraku, večji od ena.

Ploščino bomo izračunali podobno. Najprej določimo nekaj začetnih ploščin, nato ploščino po n-ti iteraciji in nazadnje izračunamo limito:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\
p_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 \\
p_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 \\
p_3 &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 + 3\cdot 4^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 \\
&\dots \\
p_n &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 + 3\cdot 4^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 + \ldots + 3\cdot 4^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^n}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= \lim_{n\to\infty} p_n \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 + 3\cdot 4^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4^3}\right)^2 + \ldots \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{3^3} + 4^2\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2
\end{aligned}$$

Ploščina, ki jo oklepa Kochova snežinka, je končna, in sicer zaradi faktorja $\frac{4}{9}$ v geometrijski vrsti, ki je manjši od ena.

5 Fraktalna dimenzija

Naravno se zdi, da ima daljica dimenzijo 1, kvadrat 2 in kocka 3. Navadno nam dimenzija pomeni število neodvisnih smeri gibanja, ampak do dimenzije lahko pridemo tudi drugače. Če namreč skrčimo daljico, stranico kvadrata oz. stranico kocke npr. za faktor dva, daljica razpade na dva, kvadrat na štiri in kocka na osem enako velikih delov. Torej dimenzija predstavlja eksponent v naslednji formuli, kjer je r faktor povečave (angl. *scale factor*), N število enako velikih delov, na katere objekt razpade, d pa dimenzija:

$$N = r^d$$

Če iz te zveze izrazimo d, dobimo naslednjo formulo:

$$d = \frac{\ln(N)}{\ln(r)}$$

To formulo vzamemo za definicijo fraktalne dimenzije, ki je glede na zgornji razmislek zelo naravna, ni pa seveda nujno, da je fraktalna dimenzija célo število.

Sedaj pa si oglejmo še nekaj praktičnih primerov. Izračunajmo fraktalne dimenzije fraktalov iz poglavja *Primeri v matematiki*. Vzemimo, da meri dolžina stranice Kochove snežinke pred prvo iteracijo 1 enoto; po njej razpade na 4 dele, stranica pa meri $\frac{1}{3}$ enote, kar pomeni, da je faktor povečave (da iz manjšega dobimo večji del) enak 3. Če te podatke vstavimo v formulo, dobimo:

$$d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \doteq 1.2619$$

Kot drugi zgled si poglejmo Cantorjevo množico. Ko odvzamemo srednji del, ostaneta še dva kosa, faktor povečave pa je enak 3, torej je fraktalna dimezija enaka:

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \doteq 0.6309$$

Podobno trikotnik Sierpinskega po prvi iteraciji razpade na 3 dele. Če želimo posamezen kos povečeti na velikost prvotnega, uporabimo faktor povečave 2. Iz tega sledi, da je fraktalna dimenzija trikotnika Sierpinskega:

$$d = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \doteq 1.5850$$

Literatura

[1] Sodelavci Wikipedije: *Fractal* [Internet]. Wikipedia, The Free Encyclopedia. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal`.

[2] Sodelavci Wikipedije: *Sierpinski triangle* [Internet]. Wikipedia, The Free Encyclopedia. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle`.

[3] *Fractals and the Fractal Dimension* [Internet]. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html`.

[4] *Fractal Dimension* [Internet]. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node6.html`.

[5] I. Stewart: *Kakšne oblike je snežinka? : vzorci v naravi.* Didakta, Radovljica, 2003.