Pogled skozi Ne-evklidova očala

Eva Breznik (I. gimnazija v Celju)
Nives Naraglav (Gimnazija Koper)
Neža Žager Korenjak (I. gimnazija v Celju)
Mentor: *Uroš Kuzman* (mladi raziskovalec pri IMFM in FMF UL)

Ob besedi premica *si vsakdo predstavlja ravno neomejeno črto skozi dve točki. Kaj pa, če bi bila črta ukrivljena? Si znamo to še vedno predstavljati kot premico? V nam najbolj naravni geometriji je tako vprašanje nesmiselno. Lahko pa zapustimo okvire običajne (evklidske) geometrije in se podamo v drugačen svet – v neevklidsko geometrijo. Najprej pa moramo razumeti, kaj sploh je geometrija.*

Temelje evklidske geometrije je postavil grški matematik Evklid že okoli leta 300 pr. n. št. tako, da je določil pet *aksiomov* – temeljnih resnic:

A1: Skozi poljubni dve točki poteka točno ena premica.
A2: Premica je neomejena – lahko jo podaljšamo v neskončnost.
A3: Za katerokoli daljico obstaja krožnica, ki ina to daljico za polmer in eno od krajišč za središče.
A4: Vsi pravi koti so med sabo skladni.
A5: Skozi poljubno točko T, ki ne leži na premici p, poteka natanko ena vzporednica k premici p.

Geometrija je torej nabor matematičnih objektov, ki zadoščajo tem aksiomom. Najbolj poseben izmed njih je peti aksiom, ki govori o vzporednici (premica, ki ne seka dane premice); skozi vso zgodovino so se porajali dvomi – ali se ga da izpeljati iz ostalih štirih? Ali torej sploh je aksiom oziroma ali obstaja geometrija v kateri ta aksiom ne drži? Vprašanje, za nekatere nesmiselno, je burilo matematične ume dobri dve tisočletji, nato pa je bilo ugotovljeno, da ga vendarle ne moremo izpustiti. Odkriti so bili modeli, tako imenovani neevklidskih geometrij, za katere omenjeni aksiom ne drži. Le ti so se uveljavili v 19. stol. predvsem zaradi potrebe po predstavljanju objektov v 3-razsežnem in 4-razsežnem prostoru. Sočasno z razvojem relativnostne teorije, ukrivljene geometrijo prostor-časa, raziskovanjem geometrije vesolja.

Neevklidska geometrija je abstraktna že zaradi predstave, ki geometrijskemu pojmu premica priredi ukrivljene črte, sklenjene krožnice ali preprosto objekte, ki jih nikakor nismo vajeni v tej vlogi. Najlažje si to predstavljamo s črto, ki se nam na Zemlji zdi ravna; če pa jo pogledamo iz vesolja, vidimo, da se ukrivlja po sferi Zemlje. Pogled, ki ga zagotovo niso bili vajeni v Evklidovih časih. Kot premice se v neevklidski geometriji spremenijo tudi, vsaj za naše evklidske oči, oblike osnovnih objektov (npr. daljice, razdalje, krožnice, koti, ...).

Sferična geometrija

[1]**A5:** Skozi točko T, ki ne leži na premici p, ne poteka nobena vzporednica k dani premici p.

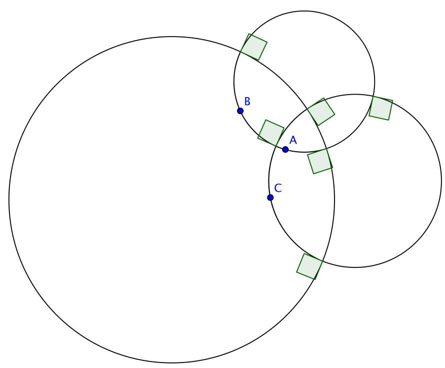
Model te geometrije je sfera, kjer je premica vsaka najdaljša možna krožnica na sferi ki ima središče skupno s sfero. Uporablja se za načrtovanje najkrajših letalskih poletov. Na navadnem zemljevidu se zato leti zdijo ukrivljeni, a so vseeno najkrajše možne razdalje med dvema mestoma!

Vir: `http://www.ipod.org.uk/reality/reality_chalk_globe.gif`.

Hiperbolična geometrija

[1]**A5:** Skozi poljubno točko T, ki ne leži na premici p, poteka več kot ena vzporednica k premici p.

Obstaja več modelov hiperbolične geometrije; glavni utemeljitelj je Eugenio Beltrami, najpreprostejši model pa je Poincaréjev disk. Ravnino predstavlja enotski disk, kjer so premice pa loki krožnice v običajni geometriji pravokotne na modelni disk. Tekstura prostor-časa je ukrivljena, zato ima vesolje hiperbolično geometrijo.

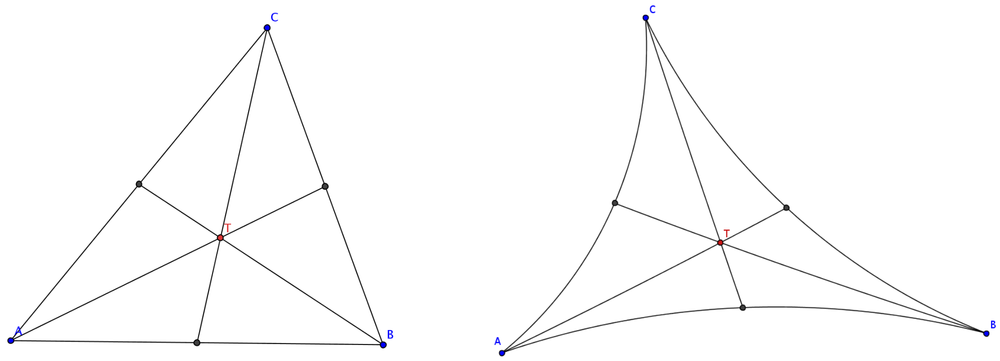


Z aksiomi v geometriji dokazujemo trditve in izreke. Ker so prvi štirje aksiomi v evklidski in neevklidski geometriji enaki, veljajo vsi dokazi porojeni le s temi aksiomi tudi v neevklidskih geometrijah. Tako se naprimer težiščnice trikotnika sekajo v eni točki tudi v hiperbolični geometriji.

Na drugi strani dokazov, v katerih je uporabljen peti aksiom, ne moremo uporabiti v neevklidskih geometrijah. Na ta način najdemo lastnosti, ki ne držijo več, ko zapustimo okvire evklidske geometrije. Lep zgled je vsota notranjih kotov trikotnika, ki je v običajni geometriji enaka 180°, v hiperbolični manjša, v eliptični pa večja od te vrednosti.

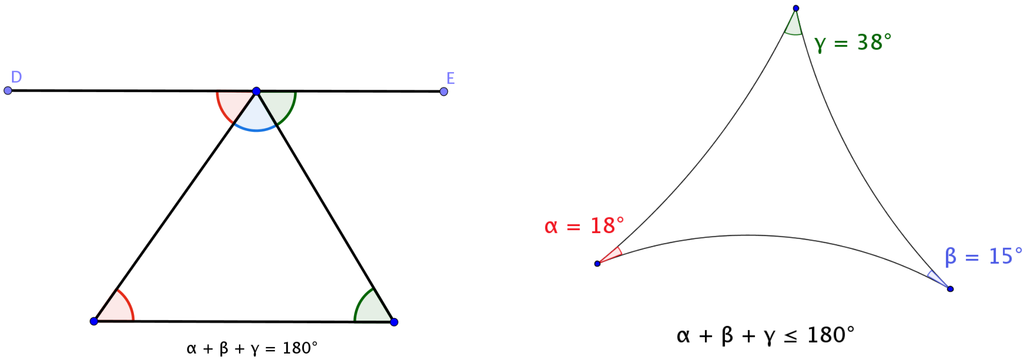
Ideja, da je moč zapustiti okvirje običajnega, nam naravnega geometrijskega sveta se je skozi čas zdela nepojmljiva, kot tudi verjetno nekdaj težko dojemljiva resnica, da zemlja ni le ravna plošča. A človekov um ne pozna meja. Zemlja je osvojena, čaka nas vesolje!

[1]Sferično in hiperbolično geometrijo definiramo s pomočjo prvih 4 aksiomov Evklidske geometrije in spremenjenega petega aksioma.



(a) Evklidska geometrija (b) Neevklidska geometrija

Slika 1: Težiščnice trikotnika se sekajo v eni točki



(a) Evklidska geometrija (b) Neevklidska geometrija

Slika 2: Vsota notranjih kotov v trikotniku

Literatura

[1] J. Castellanos: What is Non-Euclidean Geometry [Internet]. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/exercise.html`.

[2] Sodelavci Wikipedije: *Non-Euclidean geometry* [Internet]. Wikipedia, The Free Encyclopedia. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://en.wikipedia.org/wiki/Noneuclidean_geometry`.

[3] J. R. Weeks: *Oblika prostora*. DMFA, Ljubljana, 1998.

[4] H. S. M. Coxeter: *Introduction to geometry*. Wiley Classic Library, 1989.

[5] L. Shin-Hahn: *Complex numbers in geometry*. American Association of America Textbooks, 1994.