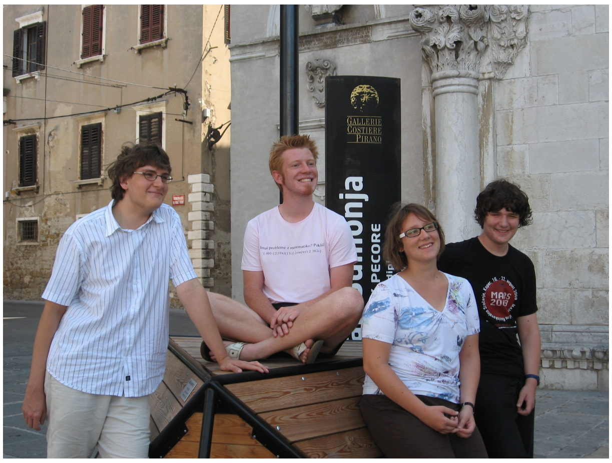
Eulerjeva karakteristika torusa

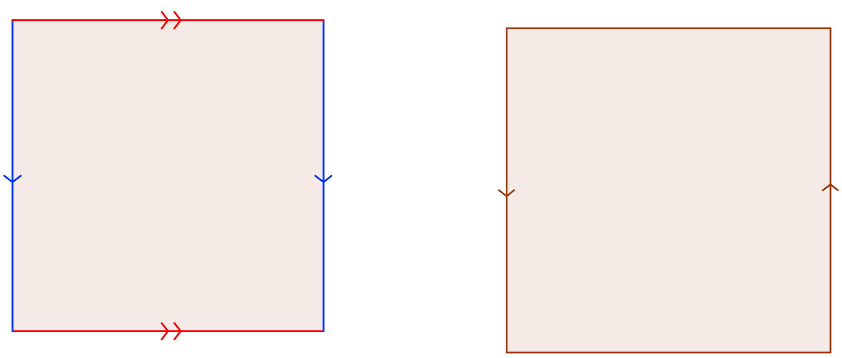
Katja Klobas (Gimnazija Koper)
Matjaž Leonardis (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana)
Aleksander Simonič (Gimnazija Ledina, Ljubljana)
Mentor: *Gašper Zadnik* (Fakulteta za matematiko in fiziko UL)



Naša MARSovska pustolovščina je bila usmerjena v raziskovanje torusa. Spoznali smo orodje, imenovano Eulerjeva karakteristika, ki nam je omogočalo brez dejanskega pogleda na ploskev določiti, koliko „lukenj“ ima. Naučili smo se tudi predstaviti toruse kot večkotnike, v katerih smo identificirali nekatere stranice.

1 Oznake in definicije

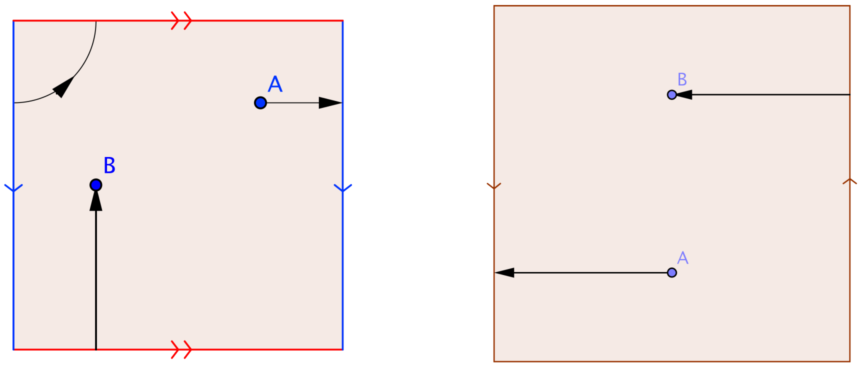
V tem članku bomo obravnavali sklenjene ploskve in ploskve z robom. Določali jim bomo Eulerjevo karakteristiko, to je celo število, ki ga bomo definirali kasneje. Ploskve bomo prikazali z razrezi, s pomočjo katerih bomo tudi določili Eulerjevo karakteristiko.



(a) Torus (b) Möbiusov trak

Slika 1: Dvorazsežni celici ploskev

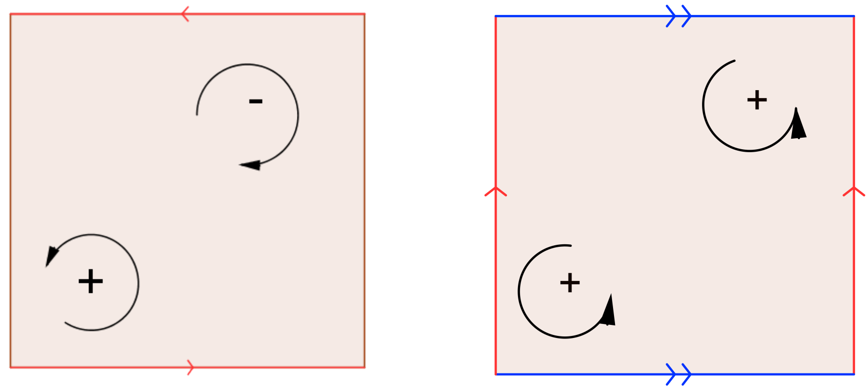
Robove štirikotnikov na sliki 1 zlepimo tako, da se puščice z istimi oznakami ujemajo. Če na robu celice ni puščice, ta ostane rob. Robova iste oznake štejemo za en rob. Število 0-celic (točk) ni enako številu oglišč štirikotnika. Vsa oglišča, ki se pri zlepljanju združijo v eno točko, obravnavamo kot eno 0-celico.



(a) Pot točke na torusu (b) Pot točke na Möbiusovem traku

Slika 2: Premikanje točke po ploskvi

Torus dobimo tako, da zlepimo nasprotne robove dvorazsežne celice (ploskvice). Če bo torej točka potovala proti levi, se bo po prehodu levega roba ploskvice pojavila na desni (slika 2(a)). Seveda tukaj ne moremo več govoriti o robovih, ker stranice štirikotnika pri lepljenju izgubimo. Podobno se bo zgodilo pri Möbiusovem traku z enim parom nasprotnih stranic štirikotnika (slika 2(b)).



Slika 3: Orientacija puščice se na Möbiusovem traku spreminja, na torusu pa ne

Oglejmo si še orientacijo ploskev. Na sliki 3 je prikazana orientacijska puščica. Predstavljajmo si, da se puščica premika znotraj ploskvice. Translacija in rotacija ne vplivata na orientacijo. Ko puščico zapeljemo preko roba, se ta pojavi na naslednjem robu z isto oznako, pri čemer je pomembna usmeritev roba. Tako se pri Möbiusovem traku pri prehodu roba orientacijska puščica obrne, na torusu pa ne.

Orientabilna ploskev je tista, kjer ne obstaja taka pot, da bi se puščica vrnila na začetno mesto z nasprotno orientacijo (kot na sliki 3(b)). V nasprotnem primeru je ploskev neorientabilna (slika 3(a)).

χ	orientabilna	neorientabilna
2	S^2	
1		P^2
0	T^2	$P^2 \# P^2$
-1		$P^2 \# P^2 \# P^2$
-2	$T^2 \# T^2$	
-3		
-4	$T^2 \# T^2 \# T^2$	
-5	$\dots$	

Tabela 1: Nekatere možne (ne)orientabilne ploskve in njihova karakteristika

Sedaj smo pripravljeni na definicijo *Eulerjeve karakteristike.* To je celo število, odvisno od števila oglišč (o), robov (r) in ploskvic (p) razreza. Označujemo ga z grško črko χ in ga izračunamo po formuli:

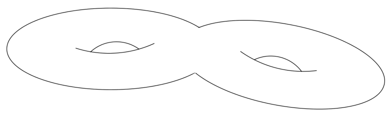
$$\chi = o - r + p$$

Eulerjeva karakteristika je neodvisna od razreza ploskve na celice (tj. pri različnih razrezih iste ploskve dobimo enako Eulerjevo karakteristiko).

Izkaže se, da Eulerjeva karakteristika in (ne)orientabilnost enolično določata topologijo sklenjene ploskve (tabela 1)[1].

2 Torusi

(a) Torusa z luknjama



(b) 2-torus

Slika 4: Sestavljanje dveh torusov v 2-torus

Iz torusa lahko izrežemo disk, nastalo ploskev imenujemo torus z luknjo (slika 4(a)). V tem primeru dobimo en nov rob, torej je $o = 1$, $r = 3$ in $p = 1$, zato je Eulerjeva karakteristika enaka:

$$\chi = o - r + p = 1 - 3 + 1 = -1$$

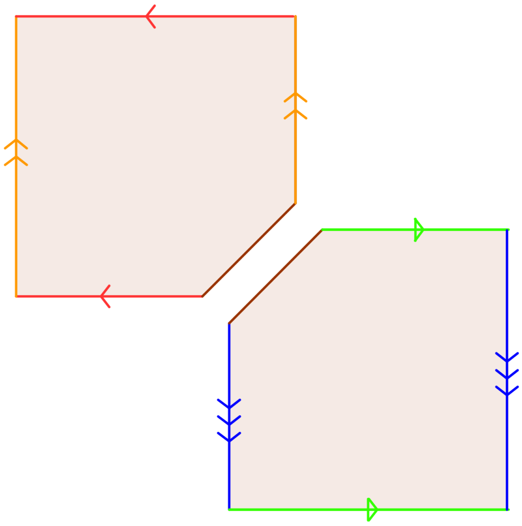
Dva torusa z luknjama lahko med sabo zlepimo po novonastalem robu, tako da spet dobimo sklenjeno ploskev. To operacijo imenujemo povezana vsota in jo označujemo z znakom #. Nastalo ploskev imenujemo dvojni torus (slika 4(b)).

Postopek lahko prikažemo tudi s celicami (slika 2).

Eulerjeva karakteristika 2-torusa je enaka:

$$\chi(T^2 \# T^2) = o - r + p = 1 - 4 + 1 = -2$$

[1]Eulerjeva karakteristika določa tudi geometrijo ploskve.



Slika 5: Torusa z luknjama

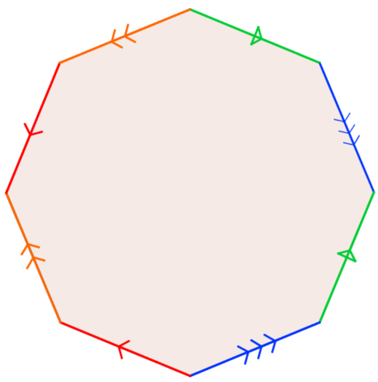
To lahko nadaljujemo do n-torusa. Število oglišč se ne spreminja, ker ima vsak nov torus z luknjo eno oglišče, ki se zlepi s prejšnjim. Prav tako ostaja število ploskvic 1. Spreminja se le število robov, ki pa se v vsakem koraku poveča za 2, ker ima vsak nov torus 3 robove od katerih se eden (rob luknje) zlepi z robom luknje, ki jo naredimo pred zlepljanjem na prejšnjem. Pri n-torusu imamo tako $o = 1$, $r = 2n$ in $p = 1$. Eulerjeva karakteristika n-torusa je tako:

$$\chi(nT^2) = o - r + p = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n$$

Opazimo, da je $\chi(nT^2)$ vedno nepozitivno sodo število.

Če imamo podano Eulerjevo karakteristiko, ki zadostuje tem pogojem in vemo, da je ploskev sklenjena orientabilna, lahko izračunamo, za kakšen n-torus gre.

$$n = \frac{2 - \chi(nT^2)}{2}$$



Slika 6: 2-torus

S tem smo tudi razložili prvi stolpec tabele.

Literatura

[1] J. R. Weeks: *Oblika prostora*. DMFA, Ljubljana, 1998.

[2] Wolfram Demonstrations Project: *Surface Morphing* [Internet]. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://demonstrations.wolfram.com/SurfaceMorphing/`.

[3] Wolfram Demonstrations Project: *Between Sphere and Torus* [Internet]. [Citirano 19. avgust 2009.] Dostopno na: `http://demonstrations.wolfram.com/BetweenSphereAndTorus/`.