Rado graf

Neža Žager Korenjak, I. gimnazija v Celju
Eva Breznik, I. gimnazija v Celju
Mentorica: Anja Komatar, University of Cambridge

1 Uvod

Naša skupina je na Marsu raziskovala *Rado graf.* Ta spada med enostavne grafe, in je zaradi nekaterih svojih lastnosti še posebej zanimiv za matematike. Toda kaj sploh je enostaven graf? Definiramo ga kot neko množico točk in povezav med njimi, ponazorimo pa s točkami in daljicami med njimi. To zapišemo kot $G = (T, E)$, kjer je T množica točk in E množica povezav. Elementa a in b iz T sta povezana natanko tedaj, ko je par $\{a, b\}$ v množici E, za kar uporabimo:

$$\forall a, b \in T; \quad a \sim b \quad \iff \quad \{a, b\} \in E.$$

Za enostavne grafe velja tudi, da nobena točka ni povezana sama s seboj:

$$\forall a; \quad \neg(a \sim a).$$

Če je a povezan z b, je b povezan z a:

$$\forall a, b; \quad a \sim b \quad \iff \quad b \sim a.$$

Izomorfizem

Definicija 1. Če imamo dva grafa $G_1 = (T_1, P_1)$ in $G_2 = (T_2, P_2)$ je prvi *izomorfen* drugemu natanko tedaj, ko obstaja $f: \quad T_1 \to T_2$ tako da velja
(i) f je bijekcija
(ii)$\forall m, n \in T_1 \quad (m \sim n) \iff (f(m) \sim f(n))$

Na sliki 1 je A izomorfen z R, F s T, K z X ter M, S, V in Z med seboj.

Razširitvena lastnost

Definicija 2. Graf $G = (T, P)$ ima razširitveno lastnost, če zanj velja, da za vsaki dve disjunktni končni podmnožici A in B množice T obstaja taka točka z, ki ni v A in B, povezana pa je z vsemi točkami iz A in z nobeno iz B, to je:

$$A, B \subseteq T, \quad A \cap B = \emptyset, \quad \exists z \notin \; A \cup B$$

$$\forall a \in A \quad a \sim z$$
$$\forall b \in B \quad \neg(b \sim z).$$

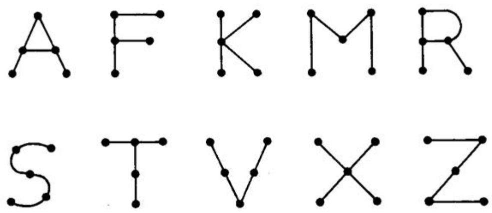
Naključni grafi

Naključen graf je graf, ki bi ga dobili, če bi se za vsako izmed povezav odločali z metom kovanca. Če želimo dobiti graf na n točkah, kjer je $n \in \mathbb{N}$, bi ga lahko dobili tudi, če bi izmed vseh možnih grafov na n točkah naključno izbrali enega.

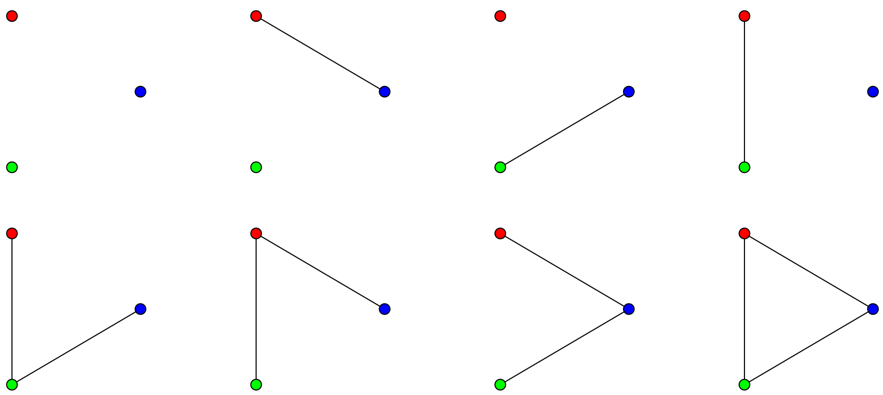
Naravno vprašanje v zvezi z končnimi grafi je, kakšna je verjetnost, da ima naključno izbran graf katero izmed lastnosti grafov. Če na primer naključno izberemo graf na treh točkah, se lahko vprašamo, kakšna je verjetnost, da bo imel graf le eno povezavo. Ker je vseh grafov na treh točkah 8 in imajo izmed njih natanko trije samo eno povezavo, je ta verjetnost $\frac{3}{8}$.

2 Rado graf

Rado graf je graf na množici točk $\mathbb{N}$. Njegove povezave lahko določimo s pomočjo binarnega zapisa nenegativnih celih števil, s katerimi označimo točke. In sicer sta



Slika 1: Črke kot grafi



Slika 2: Vsi grafi na treh točkah

točki m in n povezani, če ima v binarnem zapisu večje od teh dveh števil (brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je to n) na mestu $m+1$ (šteto od zadaj) števko 1[1], kar lahko zapišemo kot:

$$\forall m < n, n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(k) 2^k; \quad a(k) \in \{0,1\}$$

$$m \sim n \iff a_n(m) = 1.$$

Lema 1. *Rado graf ima razširitveno lastnost.*

Dokaz. Poiščimo z iz definicije 2 za vsaki podmnožici Rado grafa A in B. Naj bo m največji element množice $A \cup B$. Potem lahko izberemo z tako, da je

$$z = 2^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} a_z(k) 2^k; \quad a_z(k) = \begin{cases} 1 & \text{za } k \in A \\ 0 & \text{za } k \notin A \end{cases}$$

Tako generirano število z ima v binarnem zapisu $m+2$ števk. Po definiciji je število z povezano z vsemi števili $a \in A$ in nobenim številom $b \in B$. Člen 2^{m+1} poskrbi za to, da je z večji od m in zato gotovo z ni vsebovan v $A \cup B$. □

Izrek 1. *Vsak graf na števno neskončno točkah z razširitveno lastnostjo je Rado grafu izomorfen.*

Dokaz. Strog dokaz izreka z metodo sem-in-tja lahko bralec najde v [2]. □

Izrek 2. *Vsak končen enostaven graf je izomorfen podgrafu Rado grafa.*

Dokaz. Dokaza se bomo lotili z indukcijo. Očitno obstaja podgraf na Rado grafu, ki je izomorfen grafu na eni točki (ena točka na Rado grafu). Denimo, da obstaja podgraf Rado grafa na k točkah, ki je izomorfen grafu $G = (T, E)$, $T = \{A_1, A_2, \dots A_k\}$. Sedaj dodajmo grafu G točko A_{k+1}. Zanima nas, ali lahko vedno najdemo sliko nove točke na Rado grafu. Naj bo A množica slik vseh točk, ki so povezane z novo točko, B pa vseh, ki z novo točko A_{k+1} niso povezane. Točka Rado grafa, ki je povezana z vsemi točkami iz A in z nobeno iz B, obstaja zaradi razširitvene lastnosti. Torej je graf na $A \cup B \cup \{z\}$ izomorfen grafu na $k+1$ točkah. □

Rado grafu izomorfen graf lahko dobimo tudi, če za vsako izmed povezav med naravnimi števili mečemo kovanec. To dokažemo s pomočjo razširitvene lastnosti – vsak naključen graf na števno neskončno točkah ima namreč razširitveno lastnost. Ker lahko za poljubno veliki A in B najdemo graf, za katerega je verjetnost, da ima razširitveno lastnost, poljubno blizu 1, lahko zaključimo, da ima to lastnost

[1] če ima n manj kot $m+1$ števk, vzamemo, da je na ustreznem mestu števka 0

tudi naključni graf. Pogumen bralec si lahko dokaz izreka, ki to dejstvo bolj strogo potrdi, prebere spodaj.

Naj bosta A in B disjunktni množici moči n. Če za poljubni podmnožici točk te oblike obstaja točka z, ki je povezana z vsemi točkami iz množice A in z nobeno izmed točk množice B, rečemo da ima graf razširitveno lastnost za vse pare množic z močjo n. Očitno je, da ima potem tudi razširitveno lastnost za vse pare množic (A', B'), kjer je $|A'|, |B'| \leq n$.

Izrek 3. *Naj bo $V(N)$ verjetnost, da ima graf na N točkah razširitveno lastnost za množice z največ n točkami za neki $n \in \mathbb{N}$. Tedaj velja $\lim_{N\to\infty} V(N) = 1$.*

Dokaz. Če imamo graf G na $N > 2n$ točkah, lahko A izberemo na $\binom{N}{n}$ načinov, B na $\binom{N-n}{n}$ načinov in z na $N - 2n$ načinov.
Lažje, kot dokazati, da je $\lim_{N\to\infty} V(N) = 1$, je dokazati, da se verjetnost, da graf razširitvene lastnosti nima, manjša, oziroma je $\lim_{N\to\infty} 1 - V(N) = 0$
Fiksirajmo A, B in z. Za vsak $a_i \in A$ imamo bodisi $z \sim a_i$ ali $\neg(z \sim a_i)$, podobno je z $b_i \in B$. Zato imamo na voljo 2^{2n} različnih konfiguracij. Všeč nam je samo konfiguracija, kjer je z povezan z vsemi a_i in z nobenim izmed b_i. Zato velja

$$\mathrm{P}(z \text{ ni ustrezen}) = \frac{2^{2n} - 1}{2^{2n}} = 1 - 2^{-2n}$$

Če fiksiramo samo A in B, je $\mathrm{P}(z$ ni ustrezen$)$ za vsak z enaka. Ker lahko za dani množici A in B število z izberemo na $N - 2n$ načinov, dobimo

$$\mathrm{P}(\text{noben } z \text{ ni ustrezen}) = (1 - 2^{-2n})^{N-2n}$$

Ker pa je za neveljavnost razširitvene lastnosti dovolj, da obstaja samo en tak par množic A in B, da zanju noben z ni ustrezen, in lahko A in B izberemo na $\binom{N}{n}\binom{N-n}{n}$ načinov, dobimo:

$$1 - V(N) = P(\text{obstajata } A \text{ in } B\text{, da noben } z \text{ ni ustrezen}) = \binom{N}{n}\binom{N-n}{n}(1 - 2^{-2n})^{N-2n}$$

Sedaj ocenimo

$$\binom{N}{n}\binom{N-n}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}\frac{(N-n)!}{n!(N-2n)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot ... \cdot (N-2n+1)}{n!n!} < \frac{N^{2n}}{(n!)^2}$$

Zato imamo

$$0 \leq 1 - V(N) < \frac{N^{2n}}{(n!)^2}(1 - 2^{-2n})^{N-2n}$$

$$\lim_{N\to\infty} 1 - V(N) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{N^{2n}}{(n!)^2}(1-2^{-2n})^{N-2n} = 0$$

saj je $(n!)^2$ konstanta, eksponentna funkcija $(1-2^{-2n})^{N-2n}$ pa pada hitreje kot raste potenčna funkcija N^{2n}.
Torej $\lim_{N\to\infty} 1 - V(N) = 0$, in zato, kot smo želeli, $\lim_{N\to\infty} V(N) = 1$. $\square$

Literatura

[1] Robin J. Wilson, John J. Watkins: *Uvod v teorijo grafov.* DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997.

[2] David Marker: *Model Theory: An Introduction.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[3] Reinhard Diestel: *Graph Theory.* Springer-Verlag, New York, 2005.