Riemannova zeta funkcija in Eulerjev produkt

Rok Gregorič, Gimnazija Poljane, Ljubljana
Vid Topolovec, II. gimnazija Maribor
Katja Klobas, Gimnazija Koper
Mentor: Aleksander Simonič UL FMF

Riemannova zeta funkcija ni pomembna samo v matematični analizi, temveč igra tudi osrednjo vlogo v dokazu slavnega praštevilskega izreka. V projektu bomo pokazali, kako je povezana s praštevili preko t.i. Eulerjevega produkta in s tem nakazali možnost uporabe analize pri proučevanju lastnosti praštevil.

1 Riemannova zeta funkcija

Ena izmed najbolj poznanih, najbolj raziskovanih in najbolj razvpitih funkcij je Reimannova zeta funkcija. Ime je dobila po pomembnem nemškem matematiku, katerega prispevki so bili ključni za razvoj raznih vej matematike, na primer analize in diferencialne geometrije. Da bi lahko razumeli Rimmanovo zeta funkcijo, pa si moramo najprej ogledati pojme neskončnih vrst in konvergence.

Definicija 1. Imamo neskončno številsko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kjer je $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ zaporedje realnih števil. Izraz oblike $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ imenujemo n-ta delna vsota vrste. Vrsta je konvergentna, kadar konvergira zaporedje njenih delnih vsot. To pomeni, da obstaja tak $S \in \mathbb{R}$, da velja $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Če vrsta ni konvergentna, pravimo, da divergira.
Opomba: Ostanek vrste, $R_n = |S_n - S|$ je enak kakor $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k|$. Iz definicije limite sledi, da ostanek konvergentne vrste konvergira proti nič, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Riemannova zeta funkcija je neskončna vrsta oblike:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}; \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Spada med vrste s pozitivnimi členi, zato je njeno zaporedje delnih vsot naraščajoče. Za dokazovanje njene konvergence bomo uporabili naslednji izrek, ki ga pa ne bomo dokazali.

Izrek 1. *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z nenegativnimi členi konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot navzgor omejeno.*

1.1 Konvergenca in divergenca $\zeta(s)$

Izrek 2. *$\zeta(s)$ konvergira za $s > 1$ in divergira za $s \leq 1$.*

Dokaz.

- $s = 1$ [1]

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots \frac{1}{16}}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\ldots \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{> \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

  Opazimo, da zaporedje delnih vsot ne more biti navzgor omejeno, torej vrsta divergira.

- $s < 1$ V tem primeru velja $\frac{1}{n^s} > \frac{1}{n}$, torej za vsak k velja $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$. Ker delne vsote harmonične vrste niso navzgor omejene, sledi, da tudi delne vsote vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ niso navzgor omejene in vrsta divergira.

- $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_{< \frac{1}{2^{s-1}}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{< \frac{1}{(2^{s-1})^2}} + \underbrace{\frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots + \frac{1}{15^s}}_{< \frac{1}{(2^{s-1})^3}} + \ldots$$

$$\ldots \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1})^s} + \ldots + \frac{1}{(2^k - 1)^s}}_{< \frac{1}{(2^{s-1})^{k-1}}} + \ldots$$

  Torej je poljubna delna vsota manjša od števila

$$1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^r$$

  za neki r. To število je vedno manjše od števila

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}.$$

  Torej so delne vsote vrste navzgor omejene in je vrsta konvergentna.

$\square$

[1] Taki vrsti pravimo tudi harmonična vrsta.

2 Eulerjev produkt

Eulerjev produkt je neskončen produkt, ki ga bomo skušali povezati z Reimannovo zeta funkcijo.

Definicija 2. Eulerjev produkt definiramo kot

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}; \quad s \in \mathbb{R},$$

kjer je $\mathbb{P}$ množica praštevil.

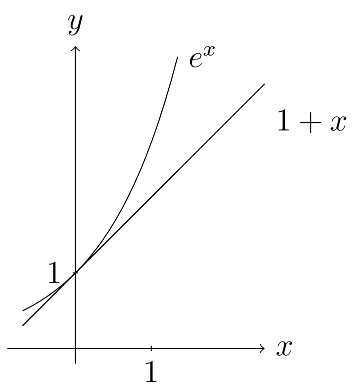
Definicija 3. Neskončen produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots$ je konvergenten, če je konvergentno zaporedje njegovih delnih produktov[2]

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n.$$

Produkti s pozitivnimi členi imajo še posebno lepe lastnosti. Oglejmo si eno izmed njih.

Izrek 3. *Produkt $\prod(1+a_n)$ s pozitivnimi realnimi členi a_n konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta $\sum a_n$.*

Lema 1. $e^x > 1 + x; \quad x > 0.$



Slika 1: Ilustrativni prikaz Leme 1

[2]Če imamo končno število ničel, jih izpustimo.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Privzamemo da je zaporedje delnih produktov konvergentno. Zaradi pozitivnosti členov lahko zapišemo:

$$P_n = (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot(1+a_3)\cdot\ldots(1+a_n) = 1+a_1+a_2+a_3+\ldots a_n+a_1\cdot a_2+\ldots > S_n$$

Ker zaporedje delnih produktov konvergira, obstaja tak M, da velja $M > P_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker velja $P_n > S_n$, velja tudi $M > S_n$ in je vrsta omejena. Iz izreka 1 sledi, da je vrsta konvergentna.
($\Leftarrow$) Naša predpostavka je konvergenca vrste $\sum a_n$. Torej obstaja tak M', da velja $M' > S_n$ za vsak n. Zaradi leme 1 velja $1 + a_n < e^{a_n}$ za vsak a_n.

$$P_n = (1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot (1 + a_3) \cdot \ldots (1 + a_n) < e^{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n} = e^{S_n}$$

Ker je funkcija e^x naraščajoča, velja: $P_n < e^{S_n} < e^{M'}$. Ker je zaporedje delnih produktov omejeno, je konvergentno. Iz definicije sledi, da je tudi produkt konvergenten. □

S pomočjo prejšnjega izreka lahko zdaj dokažemo konvergenco Eulerjevega produkta.

Izrek 4. *Eulerjev produkt za $s > 1$ konvergira.*

Dokaz.

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s - 1}\right)$$

Za vsako praštevilo p velja:

$$\frac{1}{p^s-1} < \frac{2}{p^s}; \quad s > 1$$

$$\sum_{p<N} \frac{1}{p^s-1} < \sum_{p<N} \frac{2}{p^s} < 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} < 2 \cdot \zeta(s)$$

Delne vsote vrste $\sum_p \frac{1}{p^s-1}$, ki ima pozitivne člene, so omejene, torej je vrsta konvergentna. Po izreku 3 je s tem konvergenten tudi Eulerjev produkt. □

3 Povezava zeta funkcije in Eulerjevega produkta

Leta 1737 je Euler objavil članek *Variae Observationes Circa Series Infinitas*, v katerem je funkcijo, ki jo danes poznamo kot Riemannovo zeta funkcijo, primerjal z Eulerjevim produktom. Prav ta povezava je odprla nova vrata v teoriji števil in mnogih drugih vejah matematike. Zapišimo jo v naslednjem izreku.

Izrek 5. *Zeta funkcija in Eulerjev produkt imata za vsak $s > 1$ enaki vrednosti.*

Dokaz. Pri dokazu uporabimo osnovni izrek aritmetike in izrek o množenju vrst. Vsak člen Eulerjevega produkta lahko razvijemo v geometrijsko vrsto:

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots \quad (s > 0)$$

Množimo po izreku o množenju vrst in dobimo:

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^s} \tag{2}$$

Dobljena vrsta je podvrsta $\zeta(s)$ in vsebuje vse tiste člene, katerih faktorizacija imenovalca vsebuje samo praštevila, manjša od N. Prvi del desne strani enačbe (2) je posledica dejstva, da je vsa naravna števila med 1 in N mogoče faktorizirati le na praštevila iz tega območja. Znak "$'$"pa označuje, da ne seštevamo vseh členov te vrste. Iz (2) sledi:

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = R_N(s)$$

Na desni strani neenakosti imamo ostanek vrste, za katero po izreku 2 vemo, da je konvergentna. Zato je njen ostanek poljubno majhen, ko gre $N \to \infty$. □

4 Zaključek

Za konec pa si poglejmo še nekaj posledic Eulerjevega produkta, da prikažemo njegov pomen v teoriji števil.

4.1 Divergenca $\sum \frac{1}{p}$

Enačbo (2) napišemo za $s = 1$:

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-1}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n}$$

Od tod sledi:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} < \prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-1}}$$

Za vsoto harmonične vrste vemo, da divergira, torej divergirajo tudi delni produkti na desni strani neenačaja, zato Eulerjev produkt pri $s = 1$ divergira.

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p-1}\right).$$

Zaradi izreka 3 divergira tudi vrsta $\sum \frac{1}{p-1}$. Ker za vsako praštevilo p velja $\frac{1}{p-1} < 3 \cdot \frac{1}{p}$, je vrsta $\sum \frac{1}{p}$ divergentna.

4.2 Verjetnost

Izračunajmo, kolikšna je verjetnost, da sta si dve naključno izbrani števili tuji (nimata nobenega skupnega prafaktorja). Izberimo praštevilo p_n. Verjetnost, da je neko število deljivo s p_n je $\frac{1}{p_n}$ (pri deljenju s p_n je namreč možnih ravno p_n ostankov). Za dve poljubni naravni števili je možno, da je s p_n deljivo eno, obe ali nobeno izmed njiju. Verjetnost, da sta s p_n deljivi obe, je ravno $\frac{1}{p_n^2}$. Verjetnost, da nista obe hkrati deljivi s p_n pa je $1 - \frac{1}{p_n^2}$. Vsa praštevila so si med seboj tuja, zato je verjetnost Q, da sta si dve naključno izbrani števili tuji, enaka

$$Q = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Literatura

[1] J. Globevnik, M. Brojan: *Analiza I*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.

[2] K. Knopp: *Theory and Application of Infinite Series*, Dover publications, 1990.