Vozli

Matej Petkovič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Rok Havlas, II. gimnazija Maribor
Mentor: David Gajser UL FMF

1 Povzetek

Vozli so vsakdanja stvar v življenju, saj se z njimi srečujemo pri zavezovanju vezalk, kravat, varovanju v gorah ... Vrv ima v teh primerih prosta konca in čeprav imamo z odvozlavanjem včasih težave, je vsaj v teoriji take vozle moč tudi razvozlati (če ne, pa se lahko poslužimo metode Aleksandra Velikega, ki je presekal gordijskega). V matematiki se navadno ukvarjamo z vozli, narejenimi iz sklenjene vrvi – najprej konca vrvi prepletemo in nato spojimo. Ali se da tudi take vozle vedno razvozlati, tj. poenostvaiti do nevozla?

2 Kaj je vozel?

Definicija 1. Vozel je sklenjena gladka krivulja v prostoru.

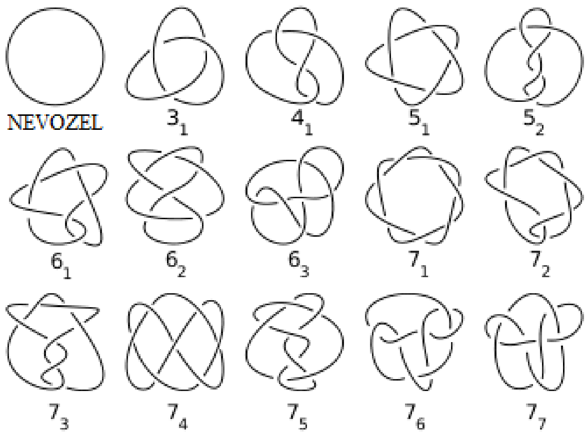
Na ravnino ga lahko projeciramo na več načinov, pri čemer uporabljamo dogovorjen način risanja. Predvsem je pomembna upodobitev križišč – zgornjo vrv navadno narišemo kot neprekinjeno črto, spodnjo pa kot prekinjeno.

Definicija 2. Ravninska projekcija vozla je gladka sklenjena krivulja v ravnini, ki seka sama sebe transverzalno v končno mnogih točkah, ki so dvojne. V vsaki točki se ve, katera nit je zgoraj.

To je razvidno tudi s slike 1.

Ne vemo še, ali lahko vsak vozel razvozlamo. Na tem mestu se vprašajmo, kolikšno je najmanjše število križišč v ravninski projekciji netrivialnega vozla, tj. vozla, ki ga (če ta sploh obstaja) ni moč poenostaviti do nevozla.

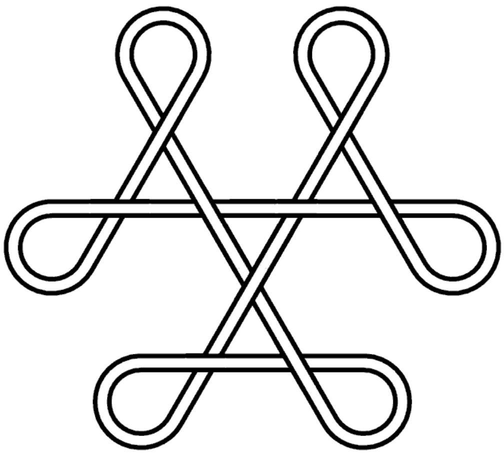
Izrek 1. *Najmanjše število križišc v ravninski projekciji netrivialnega vozla je vsaj 3.*



Slika 1: Vozli

Dokaz. Potrebno je preveriti le, ali obstaja netrivialni vozel z enim ali dvema križiščema v ravninski projekciji. Da takega vozla z enim križiščem ni, je očitno. Tudi dve križišči ne zadostujeta za netrivialen vozel, kar lahko z nekaj skicami in kombinatorike bralec hitro preveri. □

Projekcija nas lahko tudi zavede, saj so nekatere povsem različne, a predstavljajo isti tip vozla.



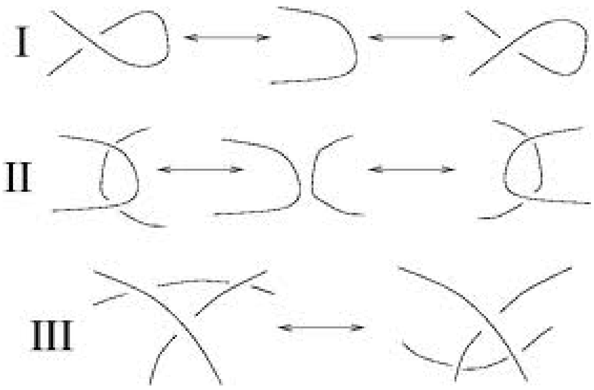
Slika 2: Projekcija nevozla

Definicija 3. Vozla sta ekvivalentna (istega tipa) takrat, ko obstaja izotopija prostora, ki preslika enega v drugega.

Definicija 4. Ravninski projekciji vozlov sta ekvivalentni, če predstavljata isti vozel.

Razložimo najprej ravninsko izotopijo. Če si ravnino predstavljamo kot tanko prožno gumo z vrisano projekcijo vozla, potem si lahko ravninsko izotopijo predstavljamo kot nategovanje in krčenje te gume. Na podoben način lahko razmišljamo tudi o izotopiji prostora.

Vendar ravninske izotopije za ekvivalentnost ravninskih projekcij vozla ne zadostujejo, zato za preoblikovanje uporabljamo še *Reidemeistrove pomike.* Poznamo tri take pomike, vidne na sliki 3.



Slika 3: Reidemeistrovi pomiki

Naslednji izrek navedimo brez dokaza.

Izrek 2. *Ravninski projekciji vozla sta ekvivalentni natanko takrat, ko obstaja zaporedje ravninskih izotopij in Reidemeistrovih pomikov, ki prenesejo eno projekcijo na drugo.*

3 Razlikovanje vozlov

Za razlikovanje vozlov uporabljamo različne invariante.

Definicija 5. Invarianta vozla je preslikava iz množice vozlov v množico X, tako da se ekvivalentna vozla preslikata v isti element iz X.

Ciljni prostor X je na primer $\mathbb{N}_0, \mathbb{R}$ ali množica posplošenih polinomov. Invariante so navadno definirane na ravninski projekciji vozla. Da bi se prepričali, ali je preslikava res invarianta, je potrebno preveriti, da se vrednost preslikave ohranja pri izotopijah in Reidemeistrovih pomikih. Dve izmed enostavnejših invariant sta križiščno število in trobarvna invarianta. Bolj uporabne so na primer Alexander-Conwayev polinom, Jonesov polinom, HOMFLY polinom in druge.

Kaj nam torej invarianta pove? Če invarianta za dva vozla vrne različna elementa iz X, potem vemo, da vozla nista ekvivalentna. Sklep v nasprotno smer ne velja.

Definicija 6. Križiščno število vozla je najmanjše možno število križišč v ravninski projekciji tega vozla.

Izrek 3. *Križiščno število je invarianta vozlov.*

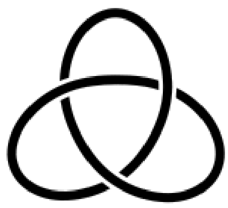
Dokaz. Da bi to dokazali, moramo preveriti, ali se križiščno število ohranja pri izotopijah in Reidemeistrovih pomikih. Da se ohranja pri izotopijah, je očitno, Reidemeistrovi pomiki pa prav tako ne spremenijo najmanjšega možnega števila križišč v projekciji. □

Definirajmo še eno invarianto. Dokaz, da je to res invarianta, bomo izpustili.

Definicija 7. Trobarvna invarianta je funkcija *col*, ki ravninski projekciji vozla K predpiše število dopustnih barvanj z največ tremi barvami. Dopustna barvanja so tista, kjer so loki - neprekinjeni deli ravninske projekcije vozla - pobarvani tako, da se v križišču stikajo bodisi tri bodisi ena sama barva. Vsak lok je pobarvan z le eno barvo.

Za invariante si želimo, da ločijo čim več vozlov in so lahko izračunljive. Pogosto ti dve lastnosti nista združljivi. Tako lahko s križiščnim številom med sabo ločimo veliko več vozlov kot s trobarvno invarianto, a ga je neprimerno težje izračunati. Trobarvna invarianta tako sploh ne loči nekaterih vozlov, na primer osmice od nevozla.

Podrobneje si oglejmo **deteljico**. Zaradi njene preprostosti in simetričnosti so jo upodabljali že stari Germani. Najstarejša upodobitev deteljice je na stebru iz 7. st., najdena pa je tudi slika iz 9. st, na kateri je zraven še bog Odin, saj deteljica simbolizira njegovo veličastnost. Deteljica je danes logotip nemške nogometne reprezentance.



Slika 4: Deteljica

Pokažimo sedaj, da se vozla iz sklenjene vrvi ne da vedno razvozlati do nevozla. To dokažemo s pomočjo deteljice in trobarvne invariante. Očitno je, da je

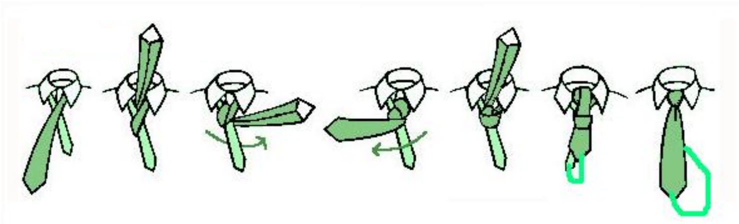
$col(nevozel) = 3$, bralec pa lahko sam preveri, da je $col(deteljica) = 9$. Sledi, da deteljica in nevozel nista isti tip vozla, torej se deteljice ne da razvozlati.

Poiščimo še križiščno število deteljice. Pokazali smo, da je deteljica zavozlana, torej ima po izreku 2 v ravninski projekciji najmanj tri križišča. Prav tako je s slike 4 razvidno, da je križiščno število 3 ali manj. Od tod sledi, da je križiščno število deteljice 3.

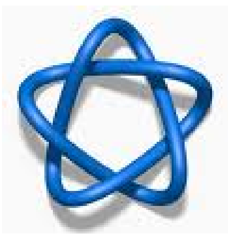
Oglejmo si vozle še na primerih *kravate*. Če prosta konca kravate združimo, dobimo matematični model za vozel. Slika 5 nam tako da po poenostavitvi kar nevozel.

Slika 5: "Nevozel"

Naslednji način zavezovanja kravate pa za razliko od prejšnjega da bolj zapleten vozel. Če si narišemo projekcijo tega vozla in jo predelamo z izotopijami in Reidemeistrovimi pomiki, dobimo petkrako zvezdo, ki je znan vozel s križiščnim številom 5.



Slika 6: "Petkraka zvezda"



Slika 7: Petkraka zvezda

Literatura

[1] Colin C. Adams: *The Knot Book* AMS, USA, 2004.

[2] `http://en.wikipedia.org/Valknut`

[3] `http://en.wikipedia.org/Knots`