Vrste v fiziki

Rok Kaufman, Gimnazija Vič, Ljubljana
Špela Pušnik, Gimnazija Velenje, Velenje
Jasna Urbančič, Gimnazija Vič, Ljubljana
Tisa Ževart, ŠC SG - Gimnazija, Šalek

Mentor: Filip Kozarski, UL FMF, Homec

Obravnavali smo matematične vrste in njihovo praktično uporabo v (pol)predstavljivih problemih. Predstavili in rešili smo tri probleme v povezavi s harmonično, geometrijsko in z alternirajočo harmonično vrsto.

1 Uvod

Prvi, ki se je ukvarjal z vrstami, je bil starogrški matematik Arhimed, ki je s pomočjo neskončne vrste izračunal ploščino pod parabolo[3].

Indijski matematik Madhava je v 14. stoletju idejo vrst razširil na funkcijske vrste. Odkril je veliko različnih vrst, ki jih danes pogosto uporabljamo, med drugim tudi Taylorjeve vrste za trigonometrične funkcije.

V evropski matematiki so se vrste pojavile v 17. stoletju z delom Jamesa Gregoryja. Leta 1715 je Brook Taylor objavil splošno metodo za konstrukcijo vrste za katerokoli funkcijo. Danes se Taylorjeve vrste veliko uporabljajo v fiziki in tehniki.

2 Matematični uvod

Vrsta je vsota zaporedja števil $a_1, a_2, a_3 \ldots$, kar matematično zapišemo kot:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Pri vrstah gre za seštevanje neskončno mnogo členov, ker pa znamo sešteti končno število členov, lahko tvorimo zaporedje delnih vsot, katerega j-ti člen je

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} a_k = a_1 + \ldots + a_j.$$

Limita zaporedja L je število, za katero velja, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > n_0$ velja

$$|L - a_n| < \epsilon.$$

Vsaka vrsta ali konvergira ali divergira. Za konvergenco gre, če obstaja limita zaporedja delnih vsot obravnavane vrste. Če limita ne obstaja, gre za divergenco. Če vrsta konvergira, pravimo, da je limita zaporedja L vsota vrste.

Poznamo več vrst, nekaj pa smo jih uporabili tudi pri reševanju naših primerov. Prva je geometrijska vrsta, ki konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Znana je tudi njena vsota

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Harmonična vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

divergira. Alternirajoča harmonična vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots=\ln 2$$

pa nasprotno od harmonične konvergira.

3 Problemi

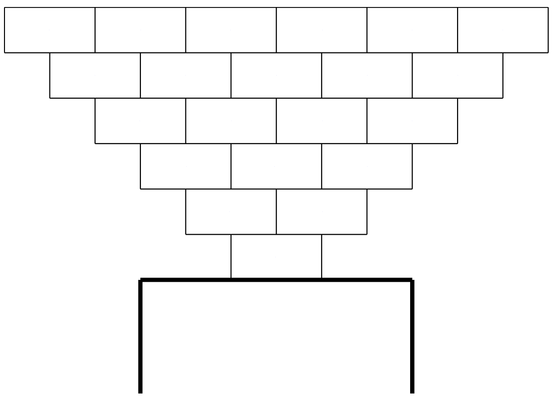
3.1 Opeke

Ob spoznavanju vrst v fiziki smo si zastavili sledeč fizikalni problem: na voljo imamo poljubno število opek, ki jih zlagamo na mizo tako, da bo vrhnja čim bolj oddaljena od roba mize v horizontalni smeri pod pogojem, da je struktura stabilna. Da je struktura stabilna, mora biti skupno težišče predhodnih opek nad opeko, na kateri stojijo, in nad mizo.

Naloge smo se lotili tako, da smo opeke začeli risati od vrha navzdol. Najprej smo postavili vrhnjo opeko, naslednjo smo zamaknili za $\frac{1}{2}$ njene širine, še naslednjo za $\frac{1}{4}$ njene širine proč od predhodnice, nato $\frac{1}{6}$ in tako naprej.

Zakaj je takšna rešitev optimalna? Za optimalno rešitev problema mora biti težišče zgornjih opek tik nad robom opeke, na kateri stojijo. Prva opeka je tako postavljena za $\frac{1}{2}$ širine naprej od druge opeke, tako da je njeno težišče tik nad robom druge opeke. Induktivno v splošnem skupno težišče zgornjih $n-1$ opek leži tik nad robom n-te opeke, medtem ko leži težišče n-te opeke za $\frac{1}{2}$ širine bliže mizi. Na skupno težišče n opek vpliva še skupno število opek in spodnja opeka, leži torej za $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$ stran od roba spodnje opeke. Od tod sledi tudi rešitev za skupno oddaljenost zgornje opeke od roba mize, če uporabimo m opek: $\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2n}$, kar je polovica seštevka prvih n členov harmonične vrste. To je tudi dokaz, da lahko z opekami pridemo poljubno daleč, saj harmonična vrsta divergira.

Našli pa smo še eno drugačno rešitev. Način zlaganja opek je prikazan na sliki 1.



Slika 1: Prikaz alternativnega zlaganja kock.

3.2 Skokica

Imamo skokico, ki jo spustimo iz višine h. Ob dotiku s tlemi se odbije nazaj v zrak do višino h_2. Opazili smo, da se taki odboji ponavljajo in vedno velja, da je višina predhodnjega odboja večja od višine trenutno opazovanega odboja. Razmerje višin po in pred odbojem smo označili s q. Zanj seveda velja $0 \leq q < 1$. Zanimalo nas je, ali se žogica neha odbijati in če, čez koliko časa se to zgodi. Ugotovili smo, da žogica za pot navzgor in navzdol potrebuje enako časa. Ker je prosti pad enakomerno pospešeno gibanje, uporabimo formulo $s = \frac{1}{2}at^2$. Kot pot s vstavimo višino h, kot pospešek a težni pospešek g. Po obračanju formule dobimo $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Skupni čas odbijanja je vsota časov posameznih odbojev.

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2h_0 \cdot q^n}{g}} \right) + \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{q^n} + \sqrt{\frac{2h_0}{g}} =$$

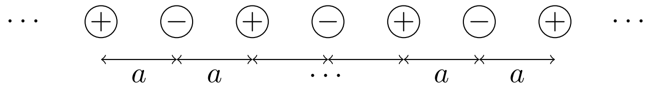
$$= 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\frac{1}{1-\sqrt{q}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\frac{2}{1-\sqrt{q}} - 1 \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}} \right)$$

V tem primeru gre za geometrijsko vrsto, ki konvergira, kar pomeni, da je čas odbijanja skokice končen.

3.3 Elektroni

Imamo neskončno dolgo vrsto, v kateri se izmenjujejo pozitivno in negativno nabiti delci. Med njimi želimo enega izmakniti in prestaviti na veliko oddaljenost. Pozitivni in negativni delci se med seboj privlačijo. Med njimi je enaka razdalja, ki jo označimo z a.



Slika 2: Vrsta elektronov in protonov, med katerimi je razdalja a.

Enačba za električno potencialno energijo delca, ki se nahaja v polju drugega, je $W_{ep} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r}$, kjer e_1 predstavlja naboj prvega, e_2 naboj drugega delca, ϵ_0 pa je influenčna konstanta [1]. Ker imamo opravka samo z elektroni in protoni, imajo po velikosti vsi osnovni naboj e_0. V tem primeru moramo upoštevati seštevek potencialnih energij glede na vse delce v vrsti.

$$W_{ep} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e_0^2}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{e_0^2 \ln 2}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Da delec pobegne, mu moramo dodati toliko dela, da bo končna potencialna energija enaka 0 (tolikšna je namreč v neskončnosti). Potrebno delo torej znaša $A = \frac{e_0^2 \ln 2}{2\pi\epsilon_0 a}$. Pri računanju smo uporabili alternirajočo harmonično vrsto, ker se pozitivni in negativni naboji izmenjujejo. Vrsta konvergira, torej delec lahko pobegne, saj je potrebna energija za pobeg končna.

4 Zaključek

Predstavili smo tri fizikalne probleme, ki so rešljivi s pomočjo vrst. V vsakem primeru smo imeli opravka z eno izmed treh značilnih vrst: s harmonično, z geometrijsko in z alternirajočo harmonično vrsto.

Za konec pa lahko predstavimo še en problem, ki za reševanje potrebuje poznavanje vrst. Recimo, da črv leze po idealno enakomerno in predvsem zelo raztegljivi gumijasti elastiki, ki je dolga en meter. Črv je zelo počasen in vsako minuto lahko pride le en centimeter daleč. Ker pa smo zlobni, mu pot še dodatno otežimo s tem, da vsako minuto elastiko sunkovito raztegnemo, da je za en meter daljša kot pred raztegom.
Ali črv lahko pride do konca elastike?

Literatura

[1] J. Strnad, *Fizika, 2. del*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 1995.

[2] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2010

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Series_(matematics)#History_of_the_theory_of_infinite_series