Kockarjev propad

Tilen Huzjak, II. gimnazija Maribor, Maribor
Vid Kocijan, Gimnazija Vič, Ljubljana-Črnuče
Aljoša Krstič, II. gimnazija Maribor, Cirknica

Mentor: Dejan Širaj, UL FMF, Rakek

Igre na srečo že dolgo privlačijo človeštvo. Ker niso deterministične, jih lahko obravnavamo le s pomočjo teorije verjetnosti. V članku je obravnavana znamenita igra kockarjev propad in vse potrebno ozadje za njeno rešitev.

1 Pogojna verjetnost

Pri reševanju našega problema igra ključno vlogo ***pogojna verjetnost***. To je verjetnost nekega dogodka pri pogoju, da poznamo neki drug dogodek. Dogodek je neka množica izidov danega poskusa, gotovi dogodek Ω pa je množica vseh izidov. Pogojno verjetnost definiramo takole:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

pri čemer sta A in B dogodka, dogodek B pa ne sme imeti ničelne verjetnosti. Presek dogodkov pomeni, da se zgodita oba dogodka hkrati.

Iz definicije neposredno sledi, da veljata zvezi:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Množica dogodkov $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ z neničelno verjetnostjo je ***popoln sistem dogodkov***, če za poljubna dva dogodka iz te množice velja, da sta nezdružljiva (tj. $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $1 \leq i \neq j \leq n$) in če vsi dogodki skupaj tvorijo gotov dogodek (tj. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$). Drugače povedano, množica dogodkov je popoln sistem, če se v vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko en dogodek iz množice.

Zgled 1. Denimo, da mečemo navadno igralno kocko. Možni izidi so vsa števila pik na kocki. Popolnih sistemov dogodkov je več, npr.
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$, $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ ipd.

Zdaj imamo vse pripravljeno za izrek, ki nam bo v nadaljevanju večkrat prišel zelo prav.

Izrek 1. *Naj bo A poljuben dogodek in $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ popoln sistem dogodkov. Potem velja t.i.* ***formula o popolni verjetnosti:***

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

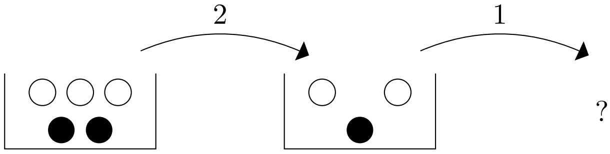
Dokaz.

$$\begin{aligned} P(A) &\overset{(1)}{=} P(A \cap \Omega) \overset{(2)}{=} P(A \cap (H_1 \cup \ldots \cup H_n)) \\ &\overset{(3)}{=} P((A \cap H_1) \cup \ldots \cup (A \cap H_n)) \\ &\overset{(4)}{=} P(A_1 \cap H_1) + \ldots + P(A \cap H_1) \\ &\overset{(5)}{=} P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) \end{aligned}$$

(1) Vsak dogodek je način (podmnožica) gotovega dogodka.
(2) Uporabimo lastnost $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$ iz definicije popolnega sistema dogodkov.
(3) Upoštevamo lastnosti računanja z unijami in preseki (distributivnost).
(4) Uporabimo lastnost iz popolnega sistema dogodkov, da so dogodki paroma nezdružljivi.
(5) Vemo, da velja $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$. □

2 Zgleda

Zgled 2. Imamo dve škatli. V prvi imamo 3 bele in 2 črni kroglici, v drugi pa 2 beli in 1 črno kroglico. Najprej na slepo prenesemo dve kroglici iz prve v drugo škatlo, nato pa iz druge škatle na slepo povlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da bo kroglica, ki jo bomo izvlekli na koncu, črna?



Slika 1: vlečenje kroglic iz škatlic

Reševanja tega problema se bomo lotili s pogojno verjetnostjo. Najprej ugotovimo, kaj je dogodek, katerega verjetnost iščemo, in postavimo ustrezne hipoteze.

Dogodek A – iz druge škatle izvlečemo črno kroglico.
Prva hipoteza H_1 – iz prve škatle izvlečemo dve beli kroglici.
Druga hipoteza H_2 – iz prve škatle izvlečemo eno belo in eno črno kroglico.
Tretja hipoteza H_3 – iz prve škatle izvlečemo dve črni kroglici.

Sedaj uporabimo obrazec za popolno verjetnost iz prejšnjega razdelka:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3).$$

Potrebno je le še izračunati posamezne verjetnosti v formuli, to so verjetnosti hipotez H_1, H_2 in H_3 ter verjetnosti dogodka A pri vsaki od hipotez.

Lotimo se najprej računanja verjetnosti posameznih hipotez. Ker imamo v prvi škatli pet kroglic in od tega tri bele, je verjetnost, da izvlečemo eno belo, enaka $\frac{3}{5}$. Ko to storimo, so v škatli le še štiri kroglice, dve beli in dve črni, kar pomeni, da verjetnost, da izvlečemo še eno belo, znaša $\frac{2}{4}$. Dobljeni verjetnosti med seboj pomnožimo, saj gre za neodvisna dogodka (izid enega ne vpliva na izid drugega). S podobnim sklepanjem izračunamo verjetnosti preostalih dveh hipotez, pri čemer upoštevamo, da pri drugi lahko najprej izvlečemo belo in nato črno ali pa obratno. Dobimo naslednje verjetnosti:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \\ P(H_2) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{10}, \\ P(H_3) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Zdaj izračunamo še iskane pogojne verjetnosti. Število $P(A|H_1)$ je verjetnost, da iz druge škatle potegnemo črno kroglico, če vemo, da smo iz prve škatle v drugo prenesli dve beli kroglici. Torej imamo v drugi škatli štiri bele in eno črno kroglico, zato velja $P(A|H_1) = \frac{1}{5}$. V primeru, ko se zgodi druga hipoteza, dobimo $P(A|H_2) = \frac{2}{5}$, v tretjem primeru pa $P(A|H_3) = \frac{3}{5}$.

Sedaj imamo vse potrebne količine, zato jih samo vstavimo v obrazec in izračunamo končni rezultat:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{25}. \end{aligned}$$

Ugotovimo, da končni rezultat znaša $\frac{9}{25}$.

Zgled 3. Lovca lovita krvoločno zver. Verjetnost zadetka za prvega lovca je 0,7, za drugega lovca pa 0,8. Vsak lovec ustreli enkrat. Verjetnost, da zver pogine, je 0,6, če je bila ustreljena enkrat, dva metka pa zver ubijeta z verjetnostjo 0,9. Kolikšna je verjetnost, da lovca ubijeta zver?

Tudi to nalogo bomo rešili z uporabo pogojne verjetnosti. Uvedemo naslednje hipoteze:

H_0 – zver ni zadeta;
H_1 – zver je zadeta natanko enkrat;
H_2 – zver je zadeta dvakrat.

Lovca zadevata neodvisno drug od drugega, zato so verjetnosti hipotez naslednje:

$$\begin{aligned} P(H_0) &= 0,3 \cdot 0,2 = 0,06, \\ P(H_1) &= 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,38, \\ P(H_2) &= 0,7 \cdot 0,8 = 0,56. \end{aligned}$$

Uporabimo formulo za pogojno verjetnost in dobimo:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_0) \cdot P(H_0) + P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\ &= 0 \cdot 0,06 + 0,6 \cdot 0,38 + 0,9 \cdot 0,56 = 0,732. \end{aligned}$$

3 Kockarjev propad

Zdaj pa si poglejmo igro, ki izvira že iz 17. stoletja. Dva igralca igrata igro s kovancem. Količina denarja prvega igralca naj bo a, količina denarja drugega igralca pa b. Označimo verjetnost, da v posameznem krogu zmaga prvi igralec, s p, verjetnost za zmago drugega igralca potem znaša $1 - p$. V vsakem krogu dá poraženec zmagovalcu 1 enoto denarja. Kolikšna je verjetnost končne zmage za posameznega igralca? Zmaga tisti, ki pobere ves denar.

Naj bo A_n dogodek, da prvi igralec propade (tj. izgubi na koncu), če ima trenutno n denarja. Za vsako naravno število n definiramo

$$p_n = P(A_n).$$

Naloga je poiskati p_a, tj. verjetnost, da propade prvi igralec, če ima a denarja.

Spet se bomo oprli na pogojno verjetnost. Postavimo potrebni hipotezi, nato pa bomo uporabili formulo o popolni verjetnosti.

H – prvi igralec v naslednjem krogu zmaga (dobi 1 od drugega igralca).
H^c – prvi igralec v naslednjem krogu izgubi (dá 1 drugemu igralcu).

Verjetnost, da prvi igralec propade, če ima n denarja, lahko zapišemo po formuli o popolni verjetnosti takole:

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(A_n|H) \cdot P(H) + P(A_n|H^c) \cdot P(H^c) \\ p_n &= p_{n+1} \cdot p + p_{n-1}(1-p) \\ (p + 1 - p)p_n &= p_{n+1} \cdot p + p_{n-1}(1-p) \\ p \cdot p_n + (1-p)p_n &= p_{n+1} \cdot p + p_{n-1}(1-p) \\ p \cdot p_n - p_{n+1} \cdot p &= p_{n-1}(1-p) - (1-p)p_n \\ p(p_n - p_{n+1}) &= (1-p)(p_{n-1} - p_n). \end{aligned}$$

Uvedemo novo oznako $u_n = p_n - p_{n+1}$. Potem velja tudi $u_{n-1} = p_{n-1} - p_n$, zato dobimo

$$pu_n = (1-p)u_{n-1}$$

oziroma
$$u_n = \frac{1-p}{p} u_{n_1}.$$
Uvedemo še oznako $r = \frac{1-p}{p}$, zato lahko zapišemo
$$u_n = r u_{n-1}.$$
Odtod lahko vse člene izrazimo z začetnim, tj. u_0:
$$\begin{aligned} u_1 &= r u_0, \\ u_2 &= r u_1 = r \cdot r u_0 = r^2 u_0, \\ &\vdots \\ u_n &= r^n u_0. \end{aligned}$$
Če ima eden od igralcev ves denar, gotovo zmaga, če pa ga nima nič, gotovo izgubi, zato lahko zapišemo
$$\begin{aligned} p_c &= 0, \\ p_0 &= 1. \end{aligned}$$
Zdaj najprej izrazimo u_0 z začetnimi podatki:
$$\begin{aligned} 1 = p_0 - p_c &= (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + \ldots + (p_{c-1} - p_c) \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{c-1} \\ &= u_0 + u_0 \cdot r + u_0 \cdot r^2 + \ldots + u_0 \cdot r^{c-1} \\ &= u_0 (1 + r + r^2 + \ldots r^{c-1}) \\ &= u_0 \frac{r^c - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$
Iz tega sledi
$$u_0 = \frac{r-1}{r^c - 1}.$$
Zdaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca:
$$\begin{aligned} p_a = p_a - p_c &= (p_a - p_{a+1}) + (p_{a+1} - p_{a+2}) + \ldots + (p_{c-1} - p_c) \\ &= u_a + u_{a+1} + \ldots + u_{c-1} \\ &= r^a u_0 + r^{a+1} u_0 + \ldots + r^{c-1} u_0 \\ &= r^a u_0 (1 + r + \ldots + r^{c-1-a}) \\ &= r^a u_0 \frac{r^{c-a} - 1}{r - 1} = u_0 \frac{r^c - r^a}{r - 1} \\ &= \frac{r-1}{r^c - 1} \cdot \frac{r^c - r^a}{r - 1} = \frac{r^c - r^a}{r^c - 1}. \end{aligned}$$
Izračunali smo verjetnost za propad prvega igralca, ki je izražena samo z začetnimi podatki, kar je bila naša naloga.

Obravnavati pa moramo še posebni primer, in sicer če imata igralca enako verjetnost za zmago v enem krogu, saj potem ne moremo deliti, ker imamo v imenovalcu število 0:
$$p = 1 - p = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 1.$$
V tem primeru so $u_0, u_1, \ldots, u_n$ med seboj enaki:
$$u_k = r^k u_0 = u_0.$$

Še lažje kot prej izrazimo u_0:

$$1 = cu_0 \Rightarrow u_0 = \frac{1}{c}$$

in nato še iskano verjetnost:

$$p_a = u_0(c - a) = \frac{(c - a)}{c} = \frac{b}{a + b}.$$

Verjetnost za zmago je v tem primeru kar razmerje med svojim vložkom in vsem denarjem:

$$1 - p_a = 1 - \frac{b}{a + b} = \frac{a}{a + b}.$$

Literatura

[1] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, DMFA SRS, Ljubljana, 1987.

[2] `http://www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/sh_17.htm`.