Komplementarna zaporedja naravnih števil

Eva Dušak, I. gimnazija v Celju, Lopata
Jan Šuntajs, Gimnazija Bežigrad (MM), Višnja Gora
Živa Urbančič, Gimnazija Vič, Ljubljana
Neža Žager Korenjak, I. gimnazija v Celju, Celje

Mentor: Gašper Zadnik, IMFM, Ljubljana

Zabavna uganka o dveh menihih nas je spodbudila k raziskovanju komplementarnih zaporedij. Ugotovili smo, da sta zaporedji tipa $[rn]$ in $[sm]$ komplementarni natanko tedaj, ko sta r in s iracionalni števili in velja $r + s = rs$.

1 Motivacija

V nekem samostanu dva meniha prodajata pivo. Za plačilo jima kupec položi denar v zaklenjeno škatlo. Ker sta v varjenju piva odlična, imata kmalu neskončno kovancev, katerih serijske številke so vsa naravna števila. Ker se meniha odpravljata v Afriko, se dogovorita za pravično delitev kovancev in sicer, da prvi vzame tiste s sodimi, drugi pa z lihimi serijskimi številkami. Vendar pride do zapleta: prvi menih ponudi drugemu neskončno zamenjavo kovancev - v vsaki potezi mu da dva kovanca in vzame enega. Drugi seveda sprejme. To se izkaže za napačno odločitev, saj izgubi vse kovance in ostane pri prodaji piva, medtem, ko prvi odpotuje v Afriko.

Kako je to mogoče?

2 Kaj je komplementarno zaporedje?

Pravimo, da sta dve naraščajoči zaporedji naravnih števil komplementarni, ko je njun presek prazna množica, v uniji pa najdemo vsa naravna števila.

Ukvarjali smo se z zaporedji oblike $[rn]$[1], $r \in \mathbb{R}$, $r < 1$, ko n teče po naravnih številih. Pogoj $r < 1$ zagotavlja, da je zaporedje strogo naraščajoče.

Definirajmo še množico A_r. To je množica vseh členov zaporedja a_n, torej $A_r = \{[rn], n \in \mathbb{N}\}$. Če sta $[rn]$ in $[sn]$ komplementarni zaporedji, velja

$$A_r \cap A_s = \emptyset$$
$$A_r \cup A_s = \mathbb{N}.$$

Zanimivo vprašanje se takoj porodi - ali za vsako število r obstaja tako število s, da bosta zaporedji $[rn]$ in $[sn]$ komplementarni?

3 Unikatnost zaporedji

Dokaz. Predpostavimo, da sta s in t različni realni števili, tako da je $a_n = [s \cdot n]$ in $b_n = [t \cdot n]$. Ali sta lahko $a_n = b_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$? BŠS lahko predpostavimo $s < t$. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $t = s + \varepsilon$ in s tem

$$[s \cdot n] = [t \cdot n] = [(s + \varepsilon) \cdot n] = [s \cdot n + \varepsilon \cdot n].$$

[1] $[x]$ označuje *funkcijo celi del*, ki število x slika v največje celo število, ki ne presega x.

Vrednost $\varepsilon \cdot n$ pri velikih n preseže 1, torej obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da $\varepsilon \cdot n = 1 + \delta$ za nek $\delta > 0$. Potem velja

$$[sn] = [tn] = [sn + 1 + \delta] = [sn + \delta] + 1 \geq [sn] + 1,$$

kar pa je protislovje. $\square$

Posledica. Opazimo, da za vsako zaporedje obstaja največ eno komplementarno zaporedje. S prvim zaporedjem je namreč drugo točno določeno.

4 Zakaj racionalna števila odpadejo?

Začnimo razmišljanje pri racionalnih številih. Ker gre za racionalni števili, lahko r in s zapišemo tudi kot par okrajšanih ulomkov $\frac{p}{q}$ in $\frac{a}{b}$. Pri tem dobimo izraza za člene zaporedij $[sn]$ ter $[rm]$ oblike

$$\left[\frac{p}{q}n\right], \ \left[\frac{a}{b}m\right].$$

Pri tem moramo upoštevati, da obstajata tudi naravni števili m in n oblike

$$m = bp, \ n = qa.$$

Torej nastopi enakost

$$\left[\frac{p}{q}n\right] = \left[\frac{a}{b}m\right] = [pa],$$

kar pomeni, da imata zaporedji vsaj en skupni člen, kar pa ni v skladu z definicijo komplementarnih zaporedji - njun presek ni prazna množica. r in s torej ne moreta biti hkrati racionalni števili.

5 Iskanje ustreznega zaporedja

Poglejmo si, kako lahko najdemo tak s, da je zaporedje $[sn]$ komplementarno zaporedju $[rn]$. Spomnimo se, da je A_r množica, ki jo določa zaporedje $[rn]$ in A_s množica, ki jo določa zaporedje $[sn]$. Denimo, da sta zaporedji $[nr]$ in $[ns]$ komplementarni. $\mathbb{N}_k$ naj bo množica prvih k naravnih števil. Poglejmo si preseke te množice z množicama A_r in A_s. Izberemo največja taka m in n, da $[nr] \leq k$ in $[ms] \leq k$.

$$A_r \cap \mathbb{N}_k = A_r(k) = \{[r], [2r], [3r], \ldots, [nr]\}$$
$$A_s \cap \mathbb{N}_k = A_s(k) = \{[s], [2s], [3s], \ldots, [ms]\}.$$

Če sta A_r in A_s komplementarni, potem za vsak k velja

$$A_r(k) \cap A_s(k) = \emptyset$$
$$A_r(k) \cup A_s(k) = \mathbb{N}_k.$$

Opazimo, da velja zveza $n + m = k$.

Poglejmo si sedaj primer za velik k, ko sta $[nr]$ in $[ms]$ zaporedni števili k in $k-1$. Torej je BŠS $nr = k + \varepsilon_1$ in $ms = k - 1 + \varepsilon_2$, $0 \leq \varepsilon_{1,2} < 1$. Za zelo velike k sta števili ε in $\varepsilon_2 - 1$ zanemarljivi v primerjavi z m, n, zato lahko privzamemo

$$r = \frac{n+m}{n}$$
$$s = \frac{m+n}{m},$$

od koder dobimo zvezo

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{n}{n+m} + \frac{m}{n+m} = 1.$$

Opazimo tudi, da je r racionalno število natanko tedaj, ko je tudi s racionalno število. Ker smo možnost, da sta tako r in s racionalni števili, izločili, torej velja $r, s \notin \mathbb{Q}$.

5.1 Ali je ta rešitev ustrezna?

Tako smo našli osumljene pare realnih števil r, s za katera so $[nr]$ in $[ns]$, $n \in \mathbb{N}$ lahko komplementarna zaporedja. Prepričati pa se moramo še, da zares ustrezajo.

Dokaz. Dokazujmo s protislovjem. Denimo, da obstajata taka m in n, da $[nr] = [ms] = x$. Potem je $nr = x + \varepsilon_1$ in $ms = x + \varepsilon_2$, $0 \leq \varepsilon_{1,2} < 1, \varepsilon_{1,2} \notin \mathbb{Q}$. Delimo prvo enačbo z r in drugo s s in ju seštejmo

$$\begin{aligned} m + n &= \frac{x+\varepsilon_1}{r} + \frac{x+\varepsilon_2}{s} \\ m + n &= x\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) + \frac{\varepsilon_1}{r} + \frac{\varepsilon_2}{s} \\ m + n &= x + \frac{\varepsilon_1}{r} + \frac{\varepsilon_2}{s} \\ m + n - x &= \frac{\varepsilon_1}{r} + \frac{\varepsilon_2}{s} < \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Vsota na levi strani enačbe je celo število, na desni pa pozitivno[2] število manjše od 1. Prišli smo v protislovje, torej za vsak $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $r > 1$, obstaja tak s, da se vsak člen pojavi kvečejmu v enem zaporedju.

Da bi bil dokaz popoln, pokažimo še, da je vsako naravno število člen vsaj enega od teh dveh zaporedji. Naj bo t poljubno naravno število. Števili $\frac{t}{r}$ in $\frac{t}{s}$ tako nista racionalni. Naj bo a najmanjše naravno število, da velja $a > \frac{t}{r}$ in b tako, da je $b > \frac{t}{s}$. Potem lahko napišemo

$$a = \frac{t}{r} + \varepsilon_1$$

$$b = \frac{t}{s} + \varepsilon_2,$$

kjer velja $0 < \varepsilon_{1,2} < 1$. Če seštejemo zgornji enačbi, dobimo

$$a + b - t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1.$$

Če je $r\varepsilon_1 < 1 \Rightarrow [ar] = [t + r\varepsilon_1] = t$ in je torej t v zaporedju $[nr]$. Ekvivalentno pokažemo tudi primer, ko je $s\varepsilon_2 < 1$. Če je $r\varepsilon_1 = 1 \Rightarrow ar = t + 1 \Rightarrow r = \frac{t+1}{a}$, kar pa je racionalno število, torej pridemo v protislovje. Enako velja v primeru, ko je $s\varepsilon_2 = 1$. Ali je možno, da sta $r\varepsilon_1$ in $s\varepsilon_2$ hkrati večja od 1? Potem bi veljalo

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

kar pa je v protislovju z ugotovitvijo, da je $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$. □

6 Kaj pa naši menihi?

Meniha igrata igro brez konca - potez je neskončno. Če na zvit način preštevamo kovance, ima na koncu res prebrisani menih vse. V n-ti potezi namreč da drugemu menihu dva kovanca katerih serijske številke presegajo n in vzame tak kovanec, da drugi menih nima kovancev s serijskimi številkami, manjšimi od n. Tako ima prvi igralec po n potezah vse kovance s serijskimi številkami manjšimi od n. Po neskončno potezah ima torej prvi menih vse kovance - kaj drugega kot nič torej lahko ostane drugemu menihu?

Literatura

[1] I. Vidav, *Teorija števil in elementarna geometrija / Izbor člankov*, DMFA, Ljubljana, 1996.

[2] Ker sta r in s iracionalni števili velja $\varepsilon_{1,2} \neq 0$ in zato tudi $\frac{\varepsilon_1}{r} + \frac{\varepsilon_2}{s} \neq 0$