Hiperbolična ravnina

Nika Jerman, Gimnazija Poljane, Ljubljana
Nuša Kucler, Gimnazija Poljane, Ljubljana
Meta Smerkolj, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Mentor: David Gajser, UL FMF, Sp. Duplek

Matematiki poznajo več modelov hiperbolične ravnine. Ogledali smo si Poincarejev disk in na njem konstruirali nekaj geometrijskih objektov. Posebej sta nas zanimali višinska točka in težišče v hiperboličnem trikotniku.

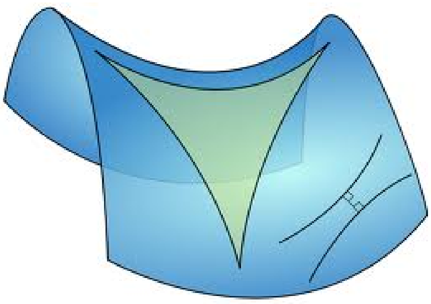
1 Uvod

Za pojem hiperbolične geometrije smo letos na srečanju MARS slišale prvič, saj se v šoli ukvarjamo samo z evklidsko geometrijo. Morale smo spremeniti svojo predstavo o osnovnih geometrijskih pojmih in se podati v neznani svet. V članku smo predstavile konstrukcije v Poincaréjevem disku in si ogledale še druge modele hiperbolične geometrije. Zanimali sta nas predvsem višinska točka in težišče v hiperboličnem trikotniku.

2 Opis in definicije

Hiperbolična ravnina

Hiperbolična ravnina je primer neevklidske ravnine. V njej ima vsaka premica več vzporednic skozi dano točko, ki ne leži na tej premici. Velja tudi, da je vsota kotov v hiperboličnem trikotniku zmeraj manjša od 180°.



Slika 1: Slika hiperbolične ravnine

Aksiomi

Aksiomi so temeljne, nedokazane resnice. Namesto, da nove pojme definiramo s pomočjo že znanih, z aksiomi le naštejemo, kaj mora za nove pojme veljati. Med najbolj znanimi so Evklidovi aksiomi za ravnino, ki jih je David Hilbert na začetku 20. stoletja izpopolnil. Pojme "premica", "točka", "ležati na", "ležati med" in "biti skladen" je pustil nedefinirane ter jih povezal s 16 aksiomi. Te še dandanes pogosto uporabljamo za osnovne resnice evklidske geometrije. Z njihovo pomočjo lahko definiramo tudi ostale pojme, kot so: biti pravokoten, biti vzporeden, trikotnik, krog . . .

Aksiom o vzporednosti

Za nas je bistven aksiom o vzporednosti, edini v Hilbertovem sistemu aksiomov, ki ga moramo spremeniti, da dobimo hiperbolično geometrijo.

Aksiom o vzporednosti v evklidski geometriji: Skozi točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

Aksiom o vzporednosti v hiperbolični geometriji: Skozi točko, ki ne leži na dani premici, potekata vsaj dve vzporednici k tej premici.

Modeli

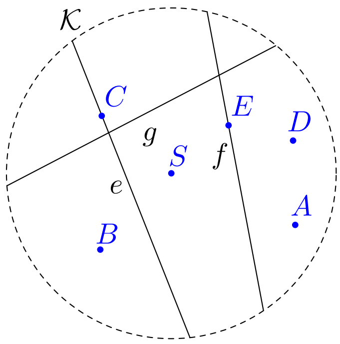
Poenostavljeno povedano, model za sistem aksiomov je nekaj predstavljivega, kar zadošča tem aksiomom. Za zgled si poglejmo, kako lahko predstavimo evklidsko ravnino.

Aksiomom evklidske ravnine zadošča model $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, y_1); x_1, y_1 \in \mathbb{R}\}$. Točke predstavljajo urejeni pari (x_1, y_1). Premice so podane s predpisi $y = kx + n$ ali $x = c$, kjer so k, n in c konstante. Točka (x_1, y_1) "leži na" premici $y = kx + n$, če je $y_1 = kx_1 + n$ (podobno za premico $x = c$). Skladnost je povezana z razdaljo med dvema točkama. Ta se izračuna po enačbi $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Z njeno pomočjo se definira pojem "biti skladen".

Modeli hiperbolične ravnine

Beltrami-Kleinov model

Začnimo z Beltrami-Kleinovim modelom. Točke v tem modelu so točke znotraj odprtega diska[1], premice pa so tetive v disku. Največja težava tega modela je, da koti v hiperbolični geometriji niso enaki izmerjenim (evklidskim) kotom in jih je potrebno preračunavati.

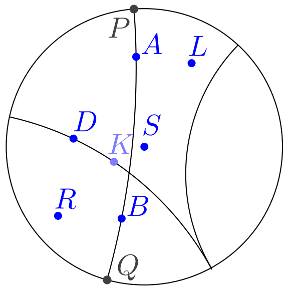


Slika 2: Nekaj točk in premic v Beltrami-Kleinovem modelu

Poincaréjev disk

Točke v tem modelu so ponovno točke odprtega diska. Premice so bodisi krožni loki, pravokotni na disk, bodisi premeri diska. Pojma "ležati na" in "ležati med" sta definirana enako kot v evklidski ravnini. Najpomembnejša lastnost tega modela je, da so evklidski koti, izmerjeni v disku, enaki kotom v hiperbolični ravnini. Hiperbolično razdaljo med dvema točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ v Poincaréjevem disku izračunamo po formuli $d_p(A, B) = \left| \ln \frac{|AP| \cdot |BQ|}{|BP| \cdot |AQ|} \right|$, kjer sta P in Q presečišči evklidske nosilke daljice[2] AB z robom diska. Omenimo še, da so krožnice v tem modelu kar evklidske krožnice. A središča ne sovpadajo. Hiperbolično središče krožnice v Poincaréjevem disku leži bliže robu diska kot evklidsko središče krožnice.

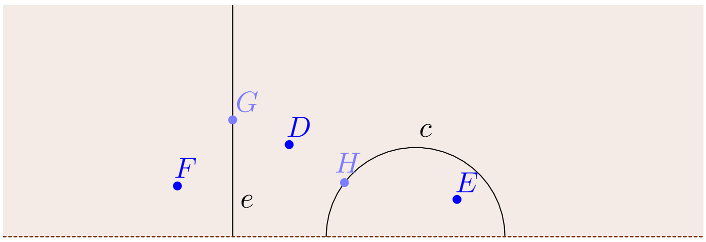
[1] tj. krog brez krožnice (notranjost kroga)
[2] evklidska nosilka hiperbolične daljice/premice je tista evklidska krožnica ali premica, na kateri leži daljica/premica.



Slika 3: Nekaj točk in premic v Poincaréjevem disku. Točki P in Q ležita na robu in nista točki Poincaréjevega diska. Velja formula $d_p(A,B) = \left| \ln \frac{|AP|\cdot|BQ|}{|BP|\cdot|AQ|} \right|$.

Poincaréjeva polravnina

Poglejmo še model Poincaréjeve polravnine. Točke v modelu so kar vse točke v polravnini. Premice so polkrožni loki s središčem na robu polravnine ali pa poltraki, pravokotni na rob polravnine. V tem modelu so koti prav tako enaki kotom v evklidski ravnini.



Slika 4: Nekaj točk in premic v Poincaréjevi polravnini

Inverzija

V nadaljevanju članka se bomo ukvarjali predvsem s hiperbolično geometrijo v Poincaréjevem disku. Za geometrijske konstrukcije v tem modelu se moramo najprej seznaniti z inverzijo.

Kaj je inverzija?

Inverzijo vedno delamo glede na neko krožnico $\mathcal{K}$ s središčem O in polmerom r. Inverzija neki točki A na poltraku z začetkom v O priredi drugo točko A' na tem poltraku, da je produkt razdalj $|AO|$ in $|A'O|$ enak r^2. Enačba inverzije je:

$$|AO| \cdot |A'O| = r^2.$$

Lastnosti inverzije na krožnico $\mathcal{K}$ s središčem O

(i) Krožnice in premice slika v krožnice in premice.

(ii) Premice skozi O slika same vase, ostale premice slika v krožnice skozi O.

(iii) Krožnice skozi izhodišče slika v premice, ostale krožnice pa v krožnice.

(iv) Ohranja kote.

(v) Kompozitum dveh inverzij na isto krožnico je identiteta: $i_{\mathcal{K}} \circ i_{\mathcal{K}} = id$.

(vi) Krožnico $\mathcal{K}$, premico skozi O in krožnice, ki sekajo krožnico $\mathcal{K}$ pod pravim kotom, inverzija preslika same vase.

Konstrukcija inverzne točke z ravnilom in šestilom

Najprej narišemo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem O. Nato iz središča potegnemo poltrak ter na njem zunaj krožnice izberemo poljubno točko T. Konstruirali bomo inverzijo točke T na krožnico $\mathcal{K}$. Narišemo krog s premerom TO in označimo z A in B presečišči tega kroga s krožnico $\mathcal{K}$. Presečišče poltraka OT z daljico AB označimo s T'. To je iskana inverzna točka od T. Narišemo tudi radij AO. Dolžino daljice OT' označimo z x, dolžino daljice OT pa z y. S primerjanjem dobljenih podobnih trikotnikov $\triangle OTA$ in $\triangle OT'A$ dobimo enačbo $\frac{x}{r} = \frac{r}{y}$ in iz nje izpeljemo glavno enačbo inverzije $r^2 = x \cdot y$.

Konstrukcije v Poincaréjevem disku

V tem razdelku bomo opisali nekaj konstrukcij v Poincaréjevem disku. Središče diska bomo zmeraj označili z O, rob pa s $\mathcal{K}$.

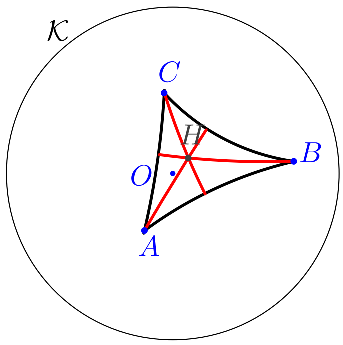
Konstrukcija premice skozi dani točki

(i) Če točki A in B ležita na premeru, potem je premica skozi A in B premer.

(ii) Če točki A in B ne ležita na premeru, potem narišemo inverzijo ene izmed točk čez krožnico $\mathcal{K}$ in dobimo točko A'/B'. Trem dobljenim točkam (A, B in A'/B') očrtamo krožnico in s tem dobimo krožni lok med točkama A in B, ki predstavlja premico.

Konstrukcija višine na AB v trikotniku $\triangle ABC$

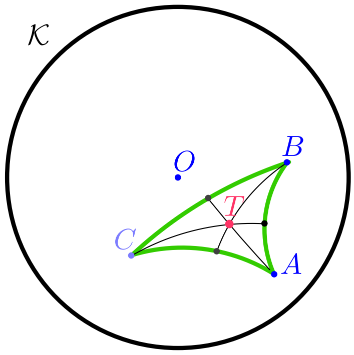
Naredimo inverzijo točke C na krožnico $\mathcal{K}$. Tako dobimo točko C'. Označimo evklidsko nosilko stranice AB s $\mathcal{K}_1$ in naredimo inverzijo na krožnico $\mathcal{K}_1$, ki preslika C v C''. Točke C, C' in C'' ležijo na evklidski nosilki višine, saj ta seka $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}_1$ pravokotno. Imamo torej tri točke na evklidski nosilki višine, kar je dovolj, da lahko višino narišemo.



Slika 5: Višinska točka H v trikotniku $\triangle ABC$

Konstrukcija težiščnice

Označimo s $\mathcal{K}_1$ evklidsko nosilko stranice AB, s $\mathcal{K}_2$ pa evklidsko nosilko simetrale stranice AB. Inverzija na $\mathcal{K}_2$ slika A v B in B v A, saj velja, da inverzija na evklidsko nosilko poljubne daljice ohranja razdaljo v Poincaréjevem disku. Opisana inverzija ohranja tudi obe krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}_1$, zato se njuni presečišči P in Q preslikata drug v drugega. Središče $\mathcal{K}_2$ je torej na presečišču premic AB in PQ. Označimo ga s S. Da bi našli polmer $\mathcal{K}_2$, moramo skonstruirati tangento na krožnico $\mathcal{K}$, ki gre skozi S. Daljica SO določa premer nove krožnice $\mathcal{K}_3$. Kjer $\mathcal{K}_3$ seka $\mathcal{K}$, dobimo točko R. Trikotnik $\triangle SRO$ je pravokoten in njegova stranica SR je ravno polmer krožnice $\mathcal{K}_2$, ki je evklidska nosilka simetrale stranice AB. Kjer ta simetrala seka stranico AB, dobimo njeno razpolovišče. Če ga povežemo z nasprotnim ogliščem, dobimo težiščnico.



Slika 6: Težišče T trikotnika $\triangle ABC$

3 Zaključek

Ugotovili smo, da lahko v Poincaréjevem disku višino in težiščnico v trikotniku skonstruiramo le s pomočjo evklidskega orodja. Opazili smo, da se težiščnice zmeraj sekajo v eni točki, težišču. Višinska točka pa obstaja le, če se sekata vsaj dve višini, kar ne velja vedno.

Literatura

[1] J. R. Weeks, *Oblika prostora*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 1998.

[2] I. Vučko, *Modeli ravninske hiperbolične geometrije*, diplomsko delo na FMF UL, Ljubljana, 2011.

[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hyperbolic_triangle.svg` [citirano 26.8.2011].