Kockarjev propad

Tilen Huzjak
Vid Kocijan
Aljoša Krstič

Mentor: Dejan Širaj

Bohinj, 28. 8. 2011

Uvod

- Kockarjev propad je že star problem in prihaja iz iger na srečo.

Uvod

- Kockarjev propad je že star problem in prihaja iz iger na srečo.
- Za njegovo obravnavo moramo uporabiti teorijo verjetnosti.

Uvod

- Kockarjev propad je že star problem in prihaja iz iger na srečo.
- Za njegovo obravnavo moramo uporabiti teorijo verjetnosti.

Pogojno verjetnost definiramo takole:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

pri čemer sta A in B dogodka, dogodek B pa ne sme imeti ničelne verjetnosti.

Izrek o popolni verjetnosti

Množica dogodkov $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ z neničelno verjetnostjo je popoln sistem dogodkov, če za poljubna dva dogodka iz te množice velja, da sta nezdružljiva (tj. $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $1 \leq i \neq j \leq n$) in če vsi dogodki skupaj tvorijo gotov dogodek (tj. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$).

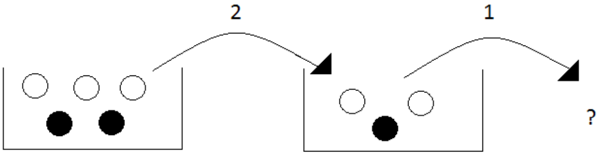
Izrek

Naj bo A poljuben dogodek in $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ popoln sistem dogodkov. Potem velja t.i. formula o popolni verjetnosti:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

Zgled

Imamo dve škatli. V prvi imamo 3 bele in 2 črni kroglici, v drugi pa 2 beli in 1 črno kroglico. Najprej na slepo prenesemo dve kroglici iz prve v drugo škatlo, nato pa iz druge škatle na slepo povlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da bo kroglica, ki jo bomo izvlekli na koncu, črna?



Slika: vlečenje kroglic iz škatlic

Prva hipoteza H_1 – iz prve škatle izvlečemo dve beli kroglici.
Druga hipoteza H_2 – iz prve škatle izvlečemo eno belo in eno črno kroglico.
Tretja hipoteza H_3 – iz prve škatle izvlečemo dve črni kroglici.

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \\ P(H_2) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{10}, \\ P(H_3) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{25}. \end{aligned}$$

Pravila igre kockarjev propad

- Prvi igralec ima a denarja, drugi pa b denarja.

Pravila igre kockarjev propad

- Prvi igralec ima a denarja, drugi pa b denarja.
- Verjetnost, da v enem krogu zmaga prvi igralec, znaša p, verjetnost, da zmaga drugi, pa je $1 - p$.

Pravila igre kockarjev propad

- Prvi igralec ima a denarja, drugi pa b denarja.
- Verjetnost, da v enem krogu zmaga prvi igralec, znaša p, verjetnost, da zmaga drugi, pa je $1 - p$.
- Poraženec kroga zmagovalcu dá 1 evro.

Pravila igre kockarjev propad

- Prvi igralec ima a denarja, drugi pa b denarja.
- Verjetnost, da v enem krogu zmaga prvi igralec, znaša p, verjetnost, da zmaga drugi, pa je $1 - p$.
- Poraženec kroga zmagovalcu dá 1 evro.
- Propade (izgubi) tisti, ki prvi ostane brez denarja.

Formula za izračun verjetnosti za zmago

- $c = a + b$ (vsota obeh vložkov)
- $r = \frac{1-p}{p}$
- Po izpeljavi, v kateri uporabimo pogojno verjetnost, dobimo formulo za izračun verjetnosti, da prvi igralec izgubi:

$$P_a = \frac{r^c - r^a}{r^c - 1}.$$

Formula za izračun verjetnosti za zmago

- $c = a + b$ (vsota obeh vložkov)
- $r = \frac{1-p}{p}$
- Po izpeljavi, v kateri uporabimo pogojno verjetnost, dobimo formulo za izračun verjetnosti, da prvi igralec izgubi:

$$P_a = \frac{r^c - r^a}{r^c - 1}.$$

- Ko je verjetnost za oba igralca enaka (pošten kovanec), je formula za izračun verjetnosti zmage prvega igralca $1 - P_a = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$. Verjetnost je torej sorazmerna deležu vloženega denarja.