Pravična delitev

Vesna Iršič, *Gimnazija Bežigrad, Ljubljana*
Tilen Lučovnik, *Gimnazija Vič, Ljubljana*
Simon Weiss, *Gimnazija Bežigrad, ljubljana*
David Gajser (mentor), *Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani*

POVZETEK
Ljudje se že od nekdaj srečujemo s problemom pravične delitve (na primer delitev torte ali predmetov med dediče). Pri projektu smo se ukvarjali s tem, kako razdeliti predmete, da bo volk sit in koza cela.

Uvod

Pogosto se srečamo s problemom, kako naj si več ljudi razdeli prekrasno tortico, ki ni na vseh mestih enaka in zato enako veliki deli nimajo nujno enake vrednosti.

Nekaterih predmetov pa ne moremo razdeliti med več oseb, ker so nedeljivi (npr. hiša, avto, računalnik ...). Delitve takšnih predmetov se moramo lotiti z drugačnimi metodami kot delitve torte. Te metode se lahko uporabljajo na primer pri delitvi dediščine.

Recimo da imamo n oseb (to bo predpostavka za celotni članek). Če vse osebe ocenjujejo, da so prejele vsaj $\frac{1}{n}$ celote, je delitev *pravična*. Vendar lahko pride do zavisti. To pomeni, da neka oseba ocenjuje, da je glede na svoje vrednotenje dobila manj kot neka druga oseba. Če nobena oseba ni zavistna, pravimo, da je delitev *brez zavisti*.

Pri postopkih delitve, ki jih bomo opisali v nadaljevanju, je ključno, da si z upoštevanjem pravil lahko zagotovimo pravični delež, tudi če se drugi pravil ne držijo.

Delitev torte

Slika 1: Rezanje torte

Postopek "Reži in izberi"

Zanima nas, kako si lahko trije marsovci razdelijo okroglo torto tako, da bo vsak mislil, da je dobil vsaj tretjino in bodo torej vsi zadovoljni. Pred tem si bomo pogledali še, kako si takšno torto pravično razdelita le dva marsovca.

Primer za 2 marsovca

Eden izmed njiju reže, in sicer torto razreže tako, da se mu zdita oba kosa vredna enako. Nato drugi marsovec izbere kos, ki se mu zdi vreden več (zanj vreden vsaj eno polovico torte). Tisti, ki je rezal, dobi preostali kos, ki se mu zdi vreden natanko eno polovico torte, zato sta oba zadovoljna.

Primer za 3 marsovce

Marsovci si določijo vrstni red in v skladu z njim jih imenujemo A, B in C. Najprej A od torte odreže kos, ki se mu zdi vreden natanko tretjino celotne torte. Nato ta kos poda B-ju, ki presodi, koliko je ta kos vreden njemu.

Če se mu zdi kos vreden manj ali enako tretjini torte, kos poda C-ju, ki se odloči ali bo kos sprejel ali ne. Če ga vzame, si A in B torto razdelita po postopku za dva marsovca. A-ju se zdi preostanek vreden natanko dve tretjini torte, B-ju pa je kos vreden več ali enako dve tretjini, zato bo na koncu vsak igralec res imel kos, ki bo njemu vreden vsaj tretjino.

Če pa C kosa noče sprejeti, ga mora vzeti A, ker je njemu vreden točno tretjino. Nato si B in C razdelita preostanek torte po sistemu za dva marsovca (utemeljitev zakaj je ta del za vsakega izmed njiju vreden vsaj dve tretjini je podobna kot zgoraj).

Če se B-ju kos, ki mu ga je podal A, zdi vreden več kot tretjino, ga obreže in preostanek kosa poda C-ju (odrezek pa vrne k preostanku torte). C se spet odloči ali bo kos sprejel; če ga vzame, si preostanek torte razdelita A in B.

Če je ta kos C-ju vreden manj kot tretjino, ga mora vzeti B, preostanek si razdelita A in C.

Delitev predmetov z denarnimi nadomestili

Zahtevnejši je problem, ko si želijo marsovci med seboj čim bolj pravično razdeliti nedeljive predmete. Iznajdljivi marsovci so se odločili, da si bodo pri tem pomagali s Knasterjevim postopkom zapečatenih ponudb.

Knasterjev postopek zapečatenih ponudb

Med n marsovcev moramo razdeliti m predmetov, tako da bo vsak dobil svoj pravični delež. Predmetov pri tem ne moremo deliti, zato razlike nadomestimo z denarjem.

1. Vsak izmed marsovcev v zapečateni kuverti odda svoje ponudbe za posamezni predmet (napiše koliko mu je kateri predmet vreden). Pri tem je pomembno, da pozna le svoje ponudbe, drugih pa ne.

2. Posamezni predmet dobi tisti, ki je zanj ponudil največ. (Če je več enakih ponudb, izberemo poljubnega.)

3. Denarna nadomestila določimo tako, da vsak marsovec dobi točno svoj pravični delež. Predmet, ki ga je dobil, plača z denarjem (po svojem vrednotenju), nato se mu del tega denarja vrne, in sicer tako, da je na koncu pridobil natančno svoj pravični delež ($\frac{1}{n}$ seštevka svojih ponudb – upoštevajoč tudi vrednost predmeta).

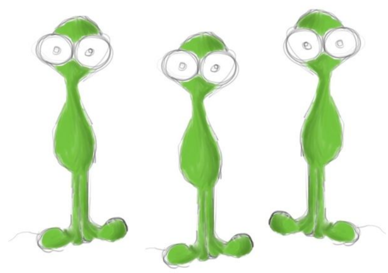
Trditev 1 *Za denarna nadomestila ne potrebujemo zunanjega financerja.*

DOKAZ. Vsak izmed n marsovcev mora dobiti $\frac{1}{n}$ vsote svojih ponudb (toliko jim moramo izplačati). Če vsoto pravičnih deležev vseh n marsovcev pomnožimo z n, dobimo točno vsoto vseh ponudb vseh marsovcev. V tem primeru so vse ponudbe za en predmet manjše ali enake največji ponudbi.

Kot že opisano, predmete dobijo tisti, ki so zanje ponudili največ. Če seštejemo te vrednosti (ki so jih dobitniki dolžni izplačati) in jih pomnožimo z n (v tem primeru gledamo, kot da so vse ponudbe za en predmet enake največji ponudbi za ta predmet), zagotovo dobimo več kot v prejšnjem primeru. Zato denarja za nadomestila nikoli ne zmanjka. Morebitni preostanek lahko porabimo za stroške postopka ali pa ga enakomerno razdelimo med vse udeležene marsovce. □

Slabost tega postopka je, da čeprav vsak marsovec dobi svoj pravični delež, lahko pride do zavisti. To pomeni, da je vsaj eden izmed marsovcev prepričan, da je nekdo drug dobil več od njega. Dodaten problem lahko nastane, če marsovci nimajo dovolj denarja za poplačilo predmetov.

Primer



Slika 2: Marsovci Marjan, Nina in Olga

Pred kratkim je naše drage marsovce prerano zapustil dedek Dorijan in svojim vnukom Marjanu, Nini in Olgi zapustil leteči krožnik, teleskop, posestvo ob jezeru in Interaktivno enciklopedijo o zemljanih ($n = 3$, $m = 4$). Vnučki so se morali zediniti, kdo bo sprejel kateri predmet. Pri tem težaškem delu so si pomagali z zgoraj opisanim postopkom. Najprej je vsak izmed njih neodvisno od drugih ovrednotil predmete in vrednosti posredoval posredniku Pavlu. Pavel je vse ponudbe strnil v tabelo 1.

	leteči krožnik	teleskop	posestvo ob jezeru	Interaktivna enciklopedija
Marjan	390	70	640	**70**
Nina	250	**280**	500	20
Olga	**400**	150	**650**	60

Tabela 1: Tabela ponudb

Pavel je nato pregledal ponudbe in sklenil, da Marjan dobi Interaktivno enciklopedijo, Nina teleskop, Olga pa leteči krožnik in posestvo. Nato je napravil izračun za denarna nadomestila in ga vnesel v tabelo 2. Pravične deleže je dobil tako, da je seštel ponudbe vsakega posameznika posebej in vsoto delil s tri. Doplačilo pa je izračunal kot razliko med tem, koliko je marsovec dobil s predmeti, in njegovim pravičnim deležem.

	pravični delež	dobil s predmeti	doplačilo
Marjan	390	70	-320
Nina	350	280	-70
Olga	420	1050	630

Tabela 2: Tabela denarnih nadomestil

Negativna vrednost v tabeli pomeni, da marsovec toliko denarja dobi, če pa je vrednost pozitivna, ga mora izplačati. Pavel je tukaj tudi preveril, če res ne bo potreboval dodatnega denarja, zato je seštel stolpec z doplačili in ugotovil, da mu bo ostalo 240 marsovskih cekinov (ki jih je z veseljem pospravil v svoj žep).

Kljub temu da se je Pavel zelo potrudil, vsi dediči niso bili zadovoljni. Marjan je namreč menil, da je Olga dobila več od njega. Zato se je Pavel odločil, da bo preveril, če je Marjanov sum utemeljen. To je storil s pomočjo tabele zavisti 3. V njej je preračunal, koliko je en marsovec mislil, da je dobil drugi. To v primeru Marjana in Nine pomeni, da je pogledal, koliko je Marjanu vreden predmet, ki ga je dobila Nina (70 cekinov), od tega pa je odštel Ninino doplačilo: $70-(-70)=140$. Za ostale je storil podobno.

	Marjan	Nina	Olga
Marjan	390	140	**400**
Nina	340	350	120
Olga	380	220	420

Tabela 3: Tabela zavisti

Ugotovil je, da je je Marjan res upravičeno zavisten Olgi, saj je dobila 10 cekinov več od njegovega pravičnega deleža. To je tudi problem Knasterjevega postopka, saj v primeru, da pride do zavisti, dediči niso zadovoljni.

Na tem mestu lahko tudi razmislimo, zakaj je tako pomembno, da marsovci ponudbe oddajo v zapečatenih ovojnicah, ne da bi poznali ponudbe drugih. Če bi na primer Marjan in Olga vedela, da Nina za teleskop ponuja 280 cekinov, bi se jima bolj splačalo zapisati, da se jima teleskop zdi vreden 279 cekinov, saj bi bil njun pravični delež tako večji in bi zato na koncu postopka dobila večjo denarno vrednost.

Delitev predmetov brez zavisti

Obstaja tudi postopek (glej vir [1]), s katerim lahko med n marsovcev razdelimo n predmetov, ne da bi prišlo do zavisti. Ta postopek je precej zapleten, zato ga bomo opisali le v grobem.

Najprej s pomočjo madžarske metode določimo, kdo dobi kateri predmet in nam plača njegovo vrednost. To naredimo tako, da pri tem dobimo kar največ denarja. Nato naredimo tabelo zavisti in vsem zavistnim marsovcem, ki so zavistni nezavistnim marsovcem, damo toliko cekinov, da niso več zavistni. To ponavljamo, dokler nihče ni več zavisten (velja namreč, da to lahko dosežemo po končnem številu korakov). Na koncu vsem marsovcem izplačamo enako denarja, in sicer toliko, da prejmejo vsaj svoj pravični delež.

Primer

Na primeru si oglejmo kako ta postopek deluje (zaradi zapletenosti se ne bomo spuščali v podrobnosti). Imamo štiri marsovce in štiri predmete – podrobnosti o ponudbah strnemo v tabelo.

	Tilen	Simon	David	Vesna
duplo kocke	50	60	40	100
vžigalnik	110	**120**	30	40
gasilni aparat	70	100	30	60
svinčnik	10	0	10	10

Tabela 4: Tabela ponudb

Predmete razdelimo tako, da dobimo kar največ denarja. Uporabimo madžarsko metodo.

1. Poiščemo največje število v tabeli (v našem primeru je to 120).

2. Naredimo tabelo, v kateri od te vrednosti odštejemo vse ostale vrednosti v tabeli 4.

70	60	80	20
10	0	90	80
50	20	90	60
110	120	110	110

3. Reduciramo tabelo: vsa števila v tabeli deljimo z njihovim največjim skupnim deliteljem (v našem primeru 10).

7	6	8	2
1	0	9	8
5	2	9	6
11	12	11	11

4. V vsakem stolpcu ali vrstici odštejemo poljubno število, tako da čim bolj zmanjšamo vrednosti v tabeli, obenem pa morajo vse vrednosti ostati nenegativne. V različnih vrsticah/stolpcih lahko odšetejemo različne vrednosti in tako dobimo:

5	4	6	0
1	0	9	8
3	0	7	4
0	1	0	0

5. Če lahko izberemo take štiri ničle iz tabele, da je vsaka v svoji vrstici in svojem stolpcu, potem smo zaključili. Sicer pa lahko najdemo takšne stolpce/vrstice, ki jih je manj kot štiri, da vsebujejo vse ničle v tabeli. V tem primeru te stolpce/vrstice obkrožimo.

   Naj bo a najmanjše neobkroženo število. Pri neobkroženih številih odštejemo a, pri enkrat obkroženih številih ne storimo nič, pri dvakrat obkroženih (to je takšnih, ki so na presečišču obkrožene vrstice in obkroženega stolpca) pa prištejemo a.

   Lahko se zgodi, da moramo ta postopek ponoviti večkrat, vendar velja, da bomo postopek po končno korakih zaključili.

   V našem primeru ne moremo takoj zaključiti, zato naredimo naslednji tabeli:

5	4	6	0
1	0	9	8
3	0	7	4
0	1	0	0

4	4	5	**0**
0	0	8	8
2	**0**	6	4
0	2	**0**	1

   Izbrane ničle v tabli nam povejo, kdo dobi kateri predmet. Torej v našem primeru Tilen dobi vžigalnik, Simon gasilski aparat, David svinčnik in Vesna duplo kocke.

6. Nato tabelo 4 preuredimo tako, da so predmeti, ki jih dobi posamezni marsovec, na diagonali.

Slika 3: Marsovci s pridobljenimi predmeti

	vžigalnik	gasilni aparat	svinčnik	duplo kocke
Tilen	**110**	70	10	50
Simon	120	**100**	0	60
David	30	30	**10**	40
Vesna	40	60	10	**100**

Tabela 5: Urejena tabela ponudb

	Tilen	Simon	David	Vesna
Tilen	0	-30	0	-50
Simon	**10**	0	-10	-40
David	-80	-50	0	-60
Vesna	-70	-40	0	0

Tabela 6: Tabela zavisti

S tem smo zaključili madžarsko metodo. Sedaj izračunamo trenutno zavist, to je koliko vsak marsovec misli, da je dobil drugi. To je strnjeno v tabeli 6.

Pogledamo, če v kateri vrstici vrednost na diagonali ni največja. V našem primeru ugotovimo, da Simon misli, da je Tilen dobil 10 cekinov več od njega – torej je zavisten. Da zavist odpravimo, damo Simonu 10 cekinov, torej v stolpcu s Simonom vsem vrednostim prištejemo 10. S tem korakom odpravimo vse zavisti. Tako vsi štirje marsovci mislijo, da so dobili največji delež. Lahko pa bi se zgodilo, da bi morali ta postopek ponoviti večkrat (po doplačilu Simonu bi lahko nastale nove zavisti).

	Tilen	Simon	David	Vesna
Tilen	0	**-20**	0	-50
Simon	10	**10**	-10	-40
David	-80	**-40**	0	-60
Vesna	-70	**-30**	0	0

Tabela 7: Tabela zavisti po doplačilu Simonu

Sedaj poiščemo osebo, ki ji do svojega pravičnega deleža (ki ga izračunamo na enak način kot pri Knasterjevem postopku) manjka največ cekinov in vsem marsovcem damo še to količino denarja. Vsem damo enako denarja zato, da ne pride spet do zavisti.

Zaključek

Predstavili smo različne primere delitve in opisali postopke, kako lahko delitev izvedemo pravično. Opazili smo, da je bistvena razlika v postopku, če delimo deljive ali nedeljive predmete. Lahko se pojavi tudi dodaten problem, in sicer zavist. V primeru, da delimo nedeljive predmete in je enako oseb in predmetov, pa lahko zavist odpravimo.

Zanimivo je tudi, da je postopek "reži in izberi" za dve osebi zelo preprost, že pri treh osebah pa se precej zaplete. Pri drugih postopkih pa število oseb ne vpliva bistveno na zapletenost postopka.

Ugotovili smo torej, kako pravično razdeliti slastno torto ali razrešiti zapleten primer dedovanja.

Viri

[1] *Pravična delitev*, `http://www.fmf.uni-lj.si/~juvan/MatematicneIgre/delitev.pdf`, citirano dne 22. 8. 2012.

[2] *Knasterjev postopek*, `http://math-cs.cns.uni.edu/~campbell/mdm/knas.html`, citirano dne 22. 8. 2012.

[3] *Knasterjev postopek*, `http://4.bp.blogspot.com/_OMeEqNjZRio/S_ObpOifilI/AAAAAAAAAEU/F7pHEgAXM-Q/s1600/Cake+Cutting+2a.jpg`, citirano dne 22. 8. 2012.

[4] *Knasterjev postopek*, `http://img.bhs4.com/2f/0/2f057965286ef76426c73fc7ba251ee94151845a_large.jpg`, citirano dne 22. 8. 2012.