Lov na komete

Enej Bole, *Gimnazija Koper*
Maja Furlan, *Gimnazija Koper*
Erik Scheriani, *United World College of the Adriatic, Devin (Italija)*
Matej Aleksandrov (mentor), *Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana*

Povzetek

Marsovci smo opazovali nebo in se odločili, da bomo določili orbite kometov. Prolema pa se nismo lotili numerično temveč s projektivno geometrijo. Uporabili smo zanimive lastnosti le-te, kot na primer premica v neskončnosti, princip dualnosti, Pascalov in Brianchonov izrek itd.

Uvod

Zaradi določenih fizikalnih zakonov je znano, da se kometi v našem osončju gibljejo po posebnih tirnicah - stožnicah. Če komet kroži po osončju, je njegov tir elipsa, če pa le zaide v osončje in ga potem zapusti, je njegov tir parabola ali hiperbola. Ker so kometi dokaj redek naravni pojav, jih veliko ljudi rado opazuje. Da jih ne bi zamudili, lahko njihovo pot napovemo že z dvema vrstama meritev. V vsakem trenutku lahko določimo lego kometa ali pa smer gibanja. Ravno določitev tira kometa bo cilj našega projekta. To bomo naredili s pomočjo projektivne geometrije, zanimalo pa nas bo kakšne in najmanj koliko meritev moramo opraviti za enolično določitev stožnice. Meritve lege kometa si bomo pri tem v projektivni geometriji predstavljali kot točke, meritve smeri gibanja pa kot tangente na stožnico.

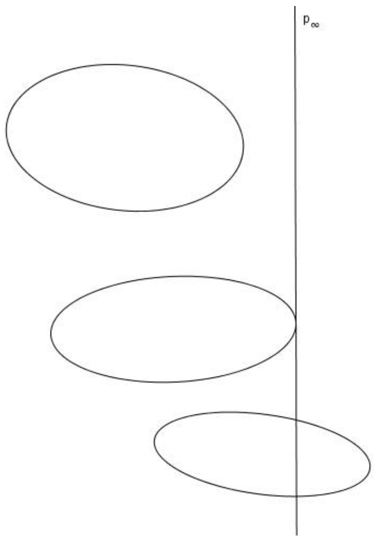
Osnove projektivne geometrije

Projektivna geometrije je posebna vrsta geometrije s pravili, ki so nekoliko drugačna od običajne evklidske geometrije. Začetki projektivne geometrije segajo v četrto stoletje, ko jo je Papus Aleksandrijski prvi začel raziskovati. Nato je projektivna geometrija tonila v pozabo, vendar jo je italijanski umetnik Filippo Brunelleschi začel uporabljati v petnajstem stoletju. Kasneje so Kepler in Desargues definirali pojem točke v neskončnosti. V devetnajstem stoletju so se s projektivno geometrijo največ ukvarjali Nemci (Riemann, Clebsch, Noether), kasneje pa Italijani (Enriques, Severi, Segre). Kasneje je projektivno geometrijo uporabil Paul Dirac v svojem delu o kvantni mehaniki, dandanes pa je to ena izmed bolj razširjenih geometrij.
Pomembna lastnost projektivne geometrije je, da se poljubni dve premici sekata v natanko eni točki. Medtem, ko so v evklidski geometriji pari vzporednih premic brez skupnih točk, se poljubni dve premici v projektivni geometriji, če ne drugje, sekata v neskončnosti, oziroma na tako imenovani neskončni premici. To je tudi eden izmed razlogov, da bomo uporabljali projektivno geometrijo namesto evklidske, saj se s tem izognemo vsem posebnim primerom konstrukcij, ko so nekatere premice vzporedne.
Značilno v projektivni geometriji je, da nimamo definiranih razdalj in kotov. Zanimivo je tudi načelo dualnosti, ki pravi, da veljajo podobne značilnosti tako za točke kot za premice. V vsakem izreku ravninske projektivne geometrije lahko torej zamenjamo točke za premice, premice za točke ter ustrezno upoštevamo medsebone relacije in dobimo dualni izrek, ki bo tudi veljal. Na primer:

- Dualno temu, da skozi dve točki poteka premica, je to, da se dve premici sekata v eni točki.
- V trikotniku zamenjamo stranice za oglišča in obratno ter ponovno dobimo trikotnik. Torej je trikotnik sam sebi dualen.

Stožnice

Kljub temu, da v projektivni geometriji poznamo le točke in premice, lahko samo s tem definiramo celo stožnice. To naredimo s pomočjo preslikave imenovane polarnost. Ta nam na poseben način določa bijekcijo med vsemi točkami oziroma poli in vsemi premicami oziroma polarami. Pri tem rečemo, da so tiste točke, ki ležijo na svoji polari, sebipolarne. Množico sebipolarnih točk nato definiramo kot stožnico. Taka definicija pa je ekvivalentna definiciji stožnice v evklidski geometriji.
Obstaja pomembna razlika med stožnicami v obeh geometrijah. Pri evklidski geometriji poznamo tri vrste stožnic: elipso, hiperbolo in parabolo, medtem ko lahko v projektivni geometriji obravnavamo le posplošen pojem stožnice. Vseeno lahko glede na medsebojno lego te posplošene stožnice in neskončne premice ločimo tri primere, ki bi nekako sovpadali s tremi vrstami stožnic evklidske geometrije. Če neskončna premica stožnico seka, si jo lahko predstavljamo kot hiperbolo. Ko se je zgolj dotika, je stožnica parabola. V zadnjem primeru, ko stožnica in neskončna premica nimata skupnih točk, pa je stožnica elipsa.



Slika 1: Stožnice v projektivni geometriji

Oglejmo si še izrek, ki nam bo odgovoril na vprašanje, najmanj koliko meritev potrebujemo za konstrukcijo stožnice.

Steinerjev izrek: Stožnica je natanko določena s petimi svojimi točkami.
Veljajo pa še naslednje posledice:

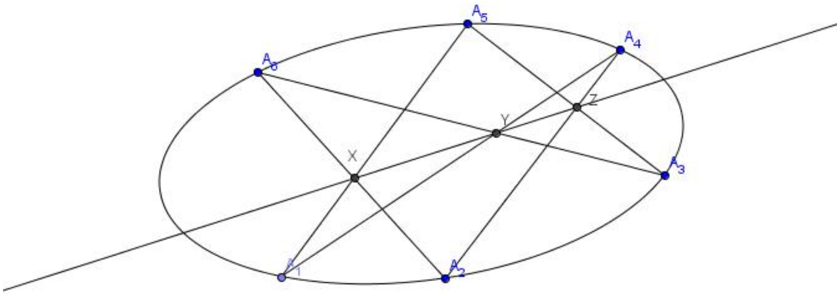
- Stožnica je določena s štirimi svojimi točkami in tangento v eni od njih.
- Stožnica je določena s tremi svojimi točkami in s tangentama v dveh od njih.
- Stožnica je določena s petmimi svojimi tangentami
- Stožnica je določena s štirimi svojimi tangentami in z dotikališčem ene od njih
- Stožnica je določena s tremi svojimi tangentami in z dotikališčema dveh od njih.

Torej moramo v vsakem primeru narediti pet meritev. Če se odločimo, da bomo kombinirali meritve obeh tipov, pa moramo te meritve narediti istočasno.

Pascalov in Brianchonov izrek

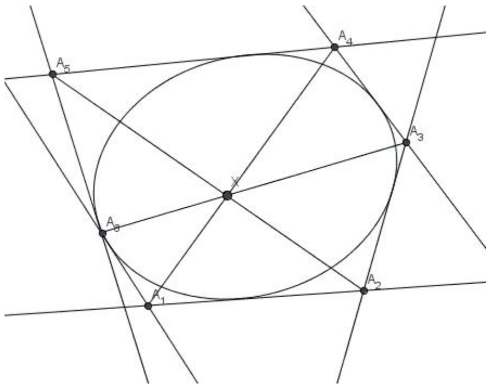
Pascalov in Brianchonov izrek sta dualni izjavi, ki sta ključnega pomena za naš projekt.

Pascalov izrek: Na stožnici izberemo poljubnih šest točk, ki jih po vrsti označimo z $A_1, A_2, \cdots, A_6$. Označimo presečišče A_1A_5 in A_2A_6 z X, A_1A_4 in A_3A_6 z Y ter A_2A_4 in A_3A_5 z Z. Velja, da so točke X, Y in Z so kolinearne.



Slika 2: Pascalov izrek

Brianchonov izrek: Ob poljubi stožnici narišemo šest tangent in označimo presečišča leteh z A_1, A_2, ...,A_6, kakor je na sliki 3. Tedaj so premice A_1A_4 , A_2A_5 in A_3A_6 konkurentne v točki X.



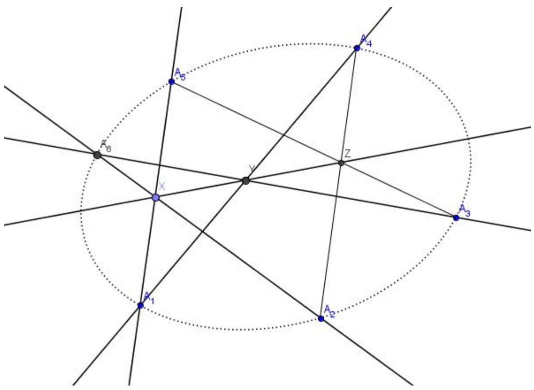
Slika 3: Brianchonov izrek

Iz skic opazimo, da lahko točke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 in A_6 Pascalovega izreka preslikamo v tangente na stožnico v Brianchonovem izreku. Posledično lahko slikamo daljice A_1A_4, A_4A_2, A_2A_6, A_6A_3, A_3A_5, A_5A_1 iz Pascalovega izreka v točke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 in A_6 v Brianchonovem izreku. Še več: konkurentne daljice A_3A_6, A_1A_4, A_2A_5 na sliki 3 so preslikave točk X, Y in Z na sliki 2. Torej lahko zaključimo, da se premica čez X, Y in Z s slike 2 preslika v točko X na sliki 3. Torej je Pascalov izrek dualen Brianchonovem.
Pri obeh izrekih je pomembno tudi to, da, če kateri dve točki ali tangenti sovpadata, izrek še vedno velja.

Konstrukcije

S pomočjo Steinerjevega izreka in njegovih posledic smo ugotovili, da vedno potrebujemo pet meritev, imamo pa šest različnih možnosti kakšne bomo naredili. Za vsako izmed teh možnosti bomo sedaj skonstruirali stožnico, ki jo dobimo iz podatkov meritev.

Pet točk na stožnici: Označimo pet točk v ravnini po vrsti z A_1, A_2, A_3, A_4 in A_5. Definirajmo točko Z kot presečišče A_2A_4 in A_3A_5 ter z X označimo poljubno točko na premici A_1A_5. Če potegnemo premico skozi Z in X dobimo točko Y kot presečišče XZ in A_1A_4. Po Pascalovem izreku leži presečišče A_3Y in A_2X, ki ga označimo z A_6, na stožnici, ki jo določajo točke A_1, A_2, A_3, A_4 in A_5. Vse ostale točke na tej stožnici dobimo pri isti konstrukciji s premikanjem točke X po premici A_1A_5.



Slika 4: Konstrukcija iz petih danih točk na stožnici

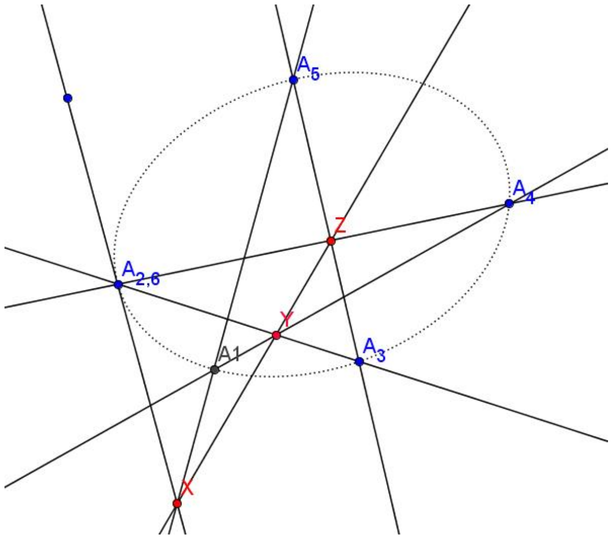
Pet tangent: Izberimo pet točk A_1, A_2, A_3, A_4 in T ter narišemo pet tangente A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4T in TA_1. Na premici A_1A_4 označimo premično točko X. Presečišče A_2X in A_4T označimo z A_5 ter presečišče A_3X in TA_1 z A_6. S tem dobimo še šesto tangento A_5A_6. Sedaj moramo Brianchonov izrek uporabiti še enkrat, da določimo še, kje se tangenta A_5A_6 dotika stožnice. To nam bo ob spreminjanju lege točke X na A_1A_4 omogočilo dobiti vse točke na stožnici. Narišemo premico skozi A_1 in A_5 ter A_4 in A_6. Presečišče označimo z X'. Presečišče premic A_1A_2 ter A_3A_4 označimo z U in jo s premico povežemo s točko X'. Kjer ta premica seka tangento A_5A_6, dobimo iskano točko dotikališča stožnice.

Poleg zgornjih osnovnih konstrukcij smo uporabili še štiri druge, pri katerih se uporablja posebne oblike Pascalovega in Brianchonovega izreka.

Štiri/tri točke in ena/dve tangenta/i v eni/dveh od njih: Konstrukciji sta zelo podobni kot pri konstrukciji s petimi točkami. Edina razlika je, da uporabimo tako obliko Pascalovega izreka, kjer združimo en ali dva para točk, ki bi bili sicer povezni s premico. V tem primeru se premica med parom točk, ki ju združimo, spremeni v tangento na stožnico. Na tak način lahko uporabimo še tangente, ki jih imamo podane na začetku.

Štiri/ tri tangente in eno/dve dotikališče/i na eni/dveh od njih: Tudi te dve konstrukciji sta zelo podobni kot konstrukcija s petimi tangentami. Kot lahko pri Pascalovem izreku združimo dve točki, lahko pri Brianchonovem izreku združimo dve sosednji tangenti. Tako njuno presečišče nastane dotikališče med novo tangento in stožnico. Tako lahko uporabimo podana dotikališča stožnice s tangentami. Vse skupaj bomo tako uporabili tiste oblike Brianchonovega izreka, kjer se združi en, dva in tri pare tangent.

Vseh šest konstrukcij smo prikazali tudi v programu Geogebra. Za vsako izmed njih smo nato izdelali orodje za avtomatsko konstrukcijo pri dani kombinaciji točk in tangent.



Slika 5: Konstrukcija iz štirih danih točk na stožnici in ene tangente

Zaključek

Iz našega projekta je razvidno, da lahko z uporabo projektivne geometrije modeliramo orbito kometa že s poljubno kombinacijo nekaj meritev lege kometa in nekaj meritev trenutne smeri kometa. Z dualnostjo smo pokazali, da so konstrukcije pri določenih izborih meritev med seboj ekvivalentne ter obenem uporabili zanimiva orodja Geogebre.
Po razmisleku in uporabi literature smo dojeli, da se v projektivni geometriji zaradi drugačnih aksiomov in dualnosti veliko lažje reši nekatere zahtevne geomtrijske naloge in geometrijske konstrukcije. Prav tako smo se s projektivno geometrijo izognili vsem izračunom, ki bi jih sicer zahtevala konstrukcija stožnice s temi podatki.

Viri

[1] M. Mitrović, *Projektivna geometrija.* DMFA založništvo, 2009.

[2] H. S. M. Coxeter in S. L. Greitzer, *Geometry revisited.* The Mathematical Association of America, 1967.

[3] *Projektivna geometrija*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry`, citirano dne 20. 8. 2012.