Pravilni večkotniki v celoštevilski mreži

Klara Nosan, *I. gimnazija v Celju*
Tjaša Košenina, *I. gimnazija v Celju*
Eva Zmazek, *Gimnazija Ptuj*
Nejc Rosenstein (mentor), *FMF, Univerza v Ljubljani*

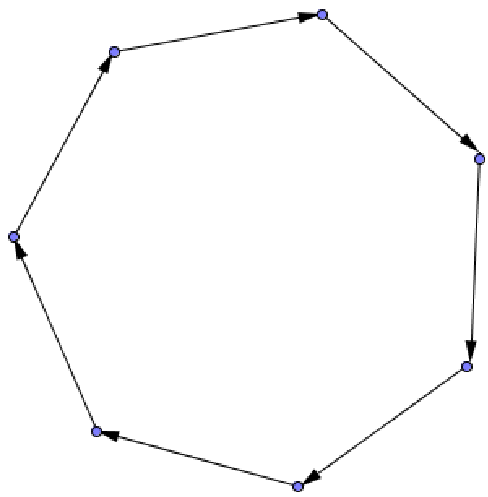
Povzetek

V članku smo preverili, ali je mogoče v celoštevilsko kvadratno mrežo vrisati mnogokotnik na tak način, da njegova oglišča ležijo na točkah mreže. Nadalje smo preverili še, katere pravilne mnogokotnike lahko na tak način vrišemo v preprosto kubično celoštevilsko mrežo.

Uvod

Celoštevilska mreža je množica vseh točk v prostoru, ki imajo za koordinate cela števila. Če z daljicami povežemo točke, ki so si med seboj najbližje, dobimo preprosto kubično mrežo. Le-ta nam je poznana iz pouka kemije, saj gre za eno izmed možnih struktur, ki jo tvorijo atomi v kristalih; eden izmed kristalov s takšno zgradbo je npr. kristal polonija. S tem, ko bomo preverili, katere pravilne mnogokotnike je možno vrisati v kubično kristalno mrežo, bomo ugotovili tudi, katere pravilne like lahko tvorijo atomi na katerikoli mrežni ravnini polonija (t.j. ravnini ki poteka skozi 3 nekolinearne točke na mreži).

Pravilni mnogokotniki na kvadratni številski mreži



Slika 1: Pravilni 7-kotnik, ki ima namesto stranic vektorje.

Stranice pravilnih n-kotnikov si lahko predstavljamo kot poligon vektorjev $\vec{v_i}$ enakih dolžin L, ki imajo komponente (x_i, y_i). Ker je poligon sklenjen, sta vsoti komponent vektorjev vzdolž x in y osi enaki nič.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \tag{1}$$

Ker imajo vse stranice enako dolžino, velja še:

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = ... = x_n^2 + y_n^2 = L^2. \tag{2}$$

Če enačbi (1) in (2) združimo, dobimo izraz:

$$\sum_1^n (x_i^2 + y_i^2) + 2\sum_{i=1}^n \sum_{i<j}^n (y_i y_j + x_i x_j) = 0. \tag{3}$$

Če upoštevamo še (2), ga zapišemo malo drugače, in sicer:

$$nL^2 = -2\sum_{i=1}^n \sum_{i<j}^n (y_i y_j + x_i x_j). \tag{4}$$

Desna stran enačbe je soda, kar pomeni, da mora biti takšna tudi leva stran. Če je število stranic n sodo, to očitno drži. V primeru, da je n lih, mora biti L^2 sodo število in preprosto je dokazati, da to drži le, če so vse x in y komponente vektorjev bodisi liha, bodisi soda števila.

V kolikor so vsi x_i in y_i sodi, to pomeni, da lahko stranice prepolovimo in mnogokotnik zmanjšamo. To lahko ponavljamo, dokler stranice nimajo ene lihe komponente, kar po zgornjem razmisleku ni mogoče, ali nimajo lihih obeh komponent. Če sta komponenti neke stranice lihi števili, je enostavno pokazati, da je $L^2 \equiv 2(mod4)$. V desni strani enačbe (4) nastopa dvojna vsota sodih števil, pomnoženih s faktorjem 2. Desna stran je potemtakem deljiva s 4, kar pripelje do paradoksa, saj leva stran s tem številom ni deljiva. V kvadratno celoštevilsko mrežo torej ne moremo vrisati pravilnih mnogokotnikov, ki bi imeli liho število stranic.

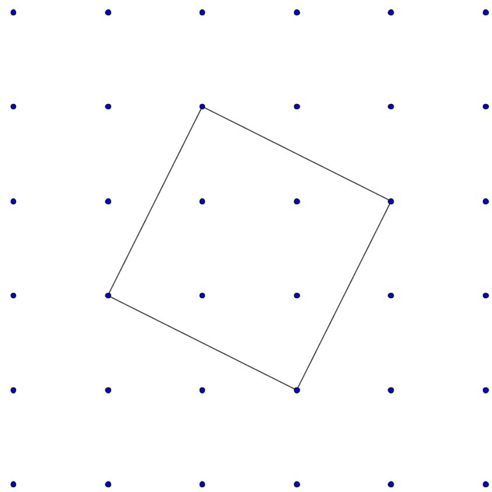
Prav tako ne moremo vanjo vrisati pravilnih mnogokotnikov, katerih število stranic je deljivo s katerimkoli lihim številom, večjim od 1. Če bi namreč v takšnem mnogokotniku s številom stranic $n = st$, kjer je s sod in t lih, povezali samo vsako s-to oglišče, bi to pomenilo, da lahko v kvadratno mrežo vrišemo pravilni mnogokotnik z lihim številom stranic; pokazali pa smo že, da je to nemogoče. Potemtakem nam preostane le še to, da preverimo, ali lahko v kvadratno mrežo vrišemo pravilen 2^k-kotnik. Očitno je, da lahko vrišemo kvadrate, če pa poskusimo vrisati pravilen osemkotnik, naletimo na težavo. Kosinusni izrek nam pove, da mora biti kosinus kota med dvema stranicama pravilnega večkotnika, vrisanega na mreži, racionalno število, kar za osemkotnik ne velja. Kosinus kota je namreč racionalen edino pri kotih med stranicami, ki so enaki $k\pi/2$ ali $k\pi/3$, če je k celo število. Dokaz za to lahko bralec najde v [2].

Mnogokotniki na kubični številski mreži.

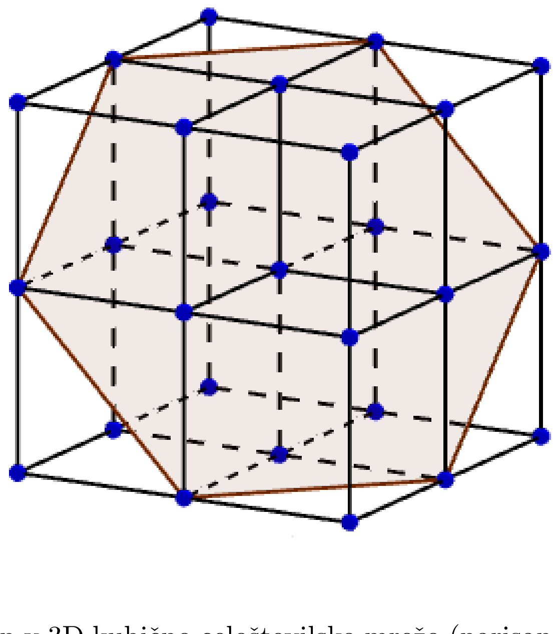
Če komponente i-te stranice pravilnega mnogokotnika, vrisanega na celoštevilsko mrežo, zapišemo kot (a_i, b_i, c_i), lahko kot med dvema stranicama izračunamo takole:

$$cos\alpha = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{L^2}.$$

Ker je kosinus kota med stranicama, podobno kot v primeru 2D mreže, racionalno število, je hitro jasno, da je racionalen tudi izraz $1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$, in posledično je racionalen tudi $tan^2\alpha$. Kvadrat tangensa notranjega kota mnogokotnika ni racionalno število, kadar je število stranic n večje od 8; dokaz za to najdemo v [3]. Že prej smo pokazali, da osemkotnik ni pravilen mrežni večkotnik. Kosinus kota med sosednjima stranicama je iracionalen še za pravilen mnogokotnik s številom stranic $n = 5$ ali $n = 7$, kar pomeni, da ju prav tako ne moremo vrisati v mrežo. Tako lahko v 3D celoštevilsko mrežo vrišemo le pravilni trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik.



Slika 2: Primer vrisanega kvadrata v kvadratni številski mreži



Slika 3: Šestkotnik, vrisan v 3D kubično celoštevilsko mrežo (narisano s programom GeoGebra). Eno izmed možnih vrisav trikotnika dobimo tako, da med seboj povežemo vsako drugo oglišče.

Zaključek

V celoštevilsko kubično mrežo lahko, za razliko od kvadratne mreže, vrišemo kar 3 pravilne mnogokotnike: šestkotnik, štirikotnik in trikotnik. To nam daje slutiti, da bomo pri risanju različnih poliedrov v 3D mrežo naleteli na omejitve. Bralec je vabljen, da sam preizkusi, katere izmed platonskih ali arhimedskih teles se da vrisati v takšno mrežo - odgovori se skrivajo v navedeni literaturi.

Viri

[1] D.G.. Ball, *Constructability of regular and equilateral polygons on square pinboard*, Mathematical Gazette 57 (1973), 119-122.

[2] W. Page, *A rational approach to lattice polygons*, The College Mathematics Journal 18 (1987), 316-317.

[3] M. Hladnik, *Pravilni mrežni večkotniki*, dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/SSUM/Pravilni_mrezni_veckotniki.pdf`, citirano dne 20. 8. 2012.