Peanova krivulja

Bajc Tjaša, *Gimnazija Poljane, Ljubljana*
Smerdu Ana, *Gimnazija Poljane, Ljubljana*
Urbančič Živa, *Gimnazija Vič, Ljubljana*
Vidrih Jana (mentorica), *Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana*

POVZETEK

Peanova krivulja je zvezna surjektivna preslikava enotskega intervala v enotski kvadrat. Obstajajo veliko različnih krivulj s takimi lastnostmi, mi pa smo se posvetili eni od enostavnejših. Opisali bomo konstrukcijo krivulje in nekaj njenih zanimivih lastnosti.

Uvod

Ali je mogoče iz enorazsežnega objekta brez širine dobiti dvorazsežen lik? Postavimo si vprašanje malo drugače. Ali si lahko predstavljate, da z eno samo krivuljo zapolnimo cel kvadrat? Vprašanje o obstoju take krivulje je burilo matematične kroge in jih močno pretreslo, ko so dobili dokončen odgovor: da, taka krivulja obstaja. To je konec 19. stoletja uspelo dokazati Giuseppu Peanu. Čeprav Peano v svojem dokazu ni konstruiral krivulje, dandanes krivulje, ki zapolnijo prostor, pogosto imenujemo Peanove krivulje. V članku se bomo podrobneje posvetile eni od konstrukcij Peanove krivulje.

Zgodovina problema

Temelje za razmišljanje o krivulji, ki bi zapolnila prostor, je postavil George Cantor leta 1878. Cantorjeva trditev pravi, da med enotskim intervalom in enotskim kvadratom obstaja bijekcija. To dognanje je Giuseppu Peanu dalo idejo o iskanju zvezne surjektivne preslikave intervala $I = [0,1]$ v enotski kvadrat. Leta je 1890 je njen obstoj tudi dokazal.

Giuseppe Peano

Giuseppe Peano se je rodil leta 1858 blizu kraja Cuneo v Italiji. Študiral je teoretično matematiko in leta 1880 doktoriral. Nadaljeval je s poučevanjem na univerzi. V prvem obdobju delovanja je pripomogel k razvoju matematične logike in popravljal tedanje napačne formulacije izrekov. Znani so tudi Peanovi aksiomi, ki definirajo naravna števila v teoriji množic. Zaradi drugačnega in samosvojega načina poučevanja so ga profesorji hoteli izključiti z univerze, a to takrat ni bilo mogoče. Po letu 1900, v svojem drugem življenjskem obdobju, se je posvetil dvema težkima, a za nadaljni razvoj matematike nepomembnima projektoma.

Konstrukcija

Imamo interval $I = [0,1]$. Konstruirati želimo zvezno surjektivno preslikavo $f : I \longrightarrow I^2$. To pomeni, da je slika preslikave cel enotski kvadrat in da krivulja ni pretrgana. Zveznost funkcije v točki natančneje definiramo tako: funkcija f je zvezna v točki a, če velja:

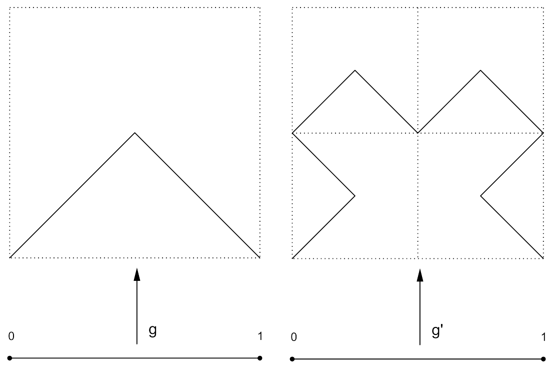
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Funkcija je zvezna, če je zvezna v vseh točkah definicijskega območja. Napišimo še formalno definicijo surjektivnosti: funkcija $f : I \longrightarrow I^2$ je surjektivna, če velja:

$$\forall (x, y) \in I^2 \; \exists t \in I: \; f(t) = (x, y)$$

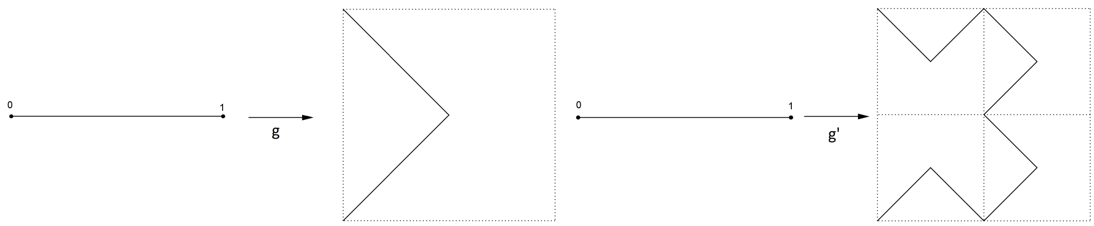
Konstrukcijo krivulje bomo predstavili v dveh korakih.

- **Korak 1.** Naj bo $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ zaprt interval in $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ zaprt kvadrat. Preslikava $g : I \longrightarrow I^2$ inteval I preslika tako, kot kaže slika 1. Operacija, ki jo želimo opisati, preslikavi g priredi preslikavo $g' : I \longrightarrow I^2$, katere graf je prikazan desno na sliki 1.



Slika 1: Funkcija g slika interva I v trikoten graf, funkcija g' nasledi preslikavo g.

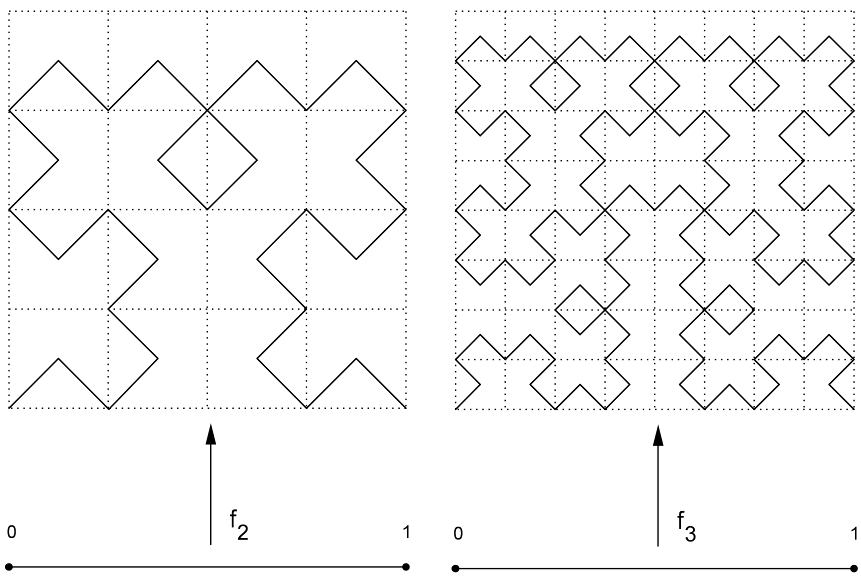
Podobna operacija se nanaša na vsak trikotni odsek, ne glede na zasuk kvadrata I, kot je razvidno s slike 2.



Slika 2: Levo je prikazan graf preslikave g in desno graf preslikave g' pri zasukanem trikotniku.

- **Korak 2.** Sedaj definiramo zaporedje preslikav $f_n : I \longrightarrow I^2$. Za začetek definirajmo preslikavo f_0, ki je enaka preslikavi g, prikazani na sliki 1. Graf preslikave f_1 dobimo z uporabo postopka, opisanega v koraku 1 na preslikavi f_0. Preslikavaf_1 je tako enaka preslikavi g', katere graf je prikazan na sliki 1. Naslednjo preslikavo, f_2, dobimo z uporabo istega postopka na vsakem izmed štirih trikotnih odsekov, ki sestavljajo preslikavo f_1. Prav tako dobimo graf preslikave f_3 z uporabo istega postopka na vsakem izmed šestnajstih trikotnih odsekov preslikave f_2. Grafa preslikav f_2 in f_3 prikazuje slika 3.

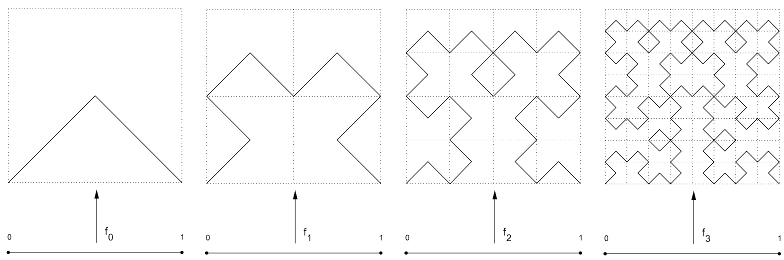
- **Splošni korak.** Poglejmo si še splošni korak. Preslikava f_n je sestavljena iz 4^n trikotnih odsekov, pri čemer vsak izmed njih leži v kvadratu z robom $\frac{1}{2^n}$. Preslikavo f_{n+1} dobimo z zamenjavo vsakega izmed trikotnih odsekov preslikave f_n s štirimi manjšimi trikotnimi odseki na način, kot je to opisano v koraku 1. Sedaj lahko definiramo iskano preslikavo f kot limito zaporedja funkcij, to je $f := \lim_{n->\infty} f_n$.



Slika 3: Levo je prikazan graf preslikave f_2 in desno graf preslikave f_3.

Zanimive lastnosti

Med konstruiranjem te zanimive in nenavadne krivulje so se nam porajala vprašanja o njenih lastnostih. Na začetku nismo bili prepričani, ali bomo prišli do kakršnih koli rezultatov ter če bodo le-ti koristni, uporabni ali razumljivi.



Slika 4: Koraki konstrukcije od 0 do 3.

- **Število trikotnih odsekov**
  Število trikotnih odsekov v 0-tem koraku je 1, v prvem 4, v drugem 16 in v tretjem 64. Število trikotnih odsekov v n-tem koraku je 4^n. To pomeni, da je iz enega trikotnega odseka v n-tem koraku dobimo 4 manjše trikotne odseke v $(n+1)$-em koraku.

- **Število točk preloma**
  Točka preloma je mesto, kjer se smer krivulje spremeni. Če se krivulja v neki točki dvakrat prelomi, to točko štejemo dvakrat. Do tega prvič pride pri grafu preslikave f_2. Število točk preloma v n-tem koraku je $2^{2n+1}-1$. To pomeni, da je v 0-tem koraku število točk preloma enako $2^{2\cdot 0+1}-1=1$, v prvem koraku $2^{2\cdot 1+1}-1=7$ in tako naprej.

- **Dolžina krivulje**
  Dolžina krivulje v n-tem koraku je $2^{\frac{2n+1}{2}}$. Drugače povedano: $d_{n+1}=2\cdot d_n$, kjer je d_n pomeni dolžino krivulje v n-tem koraku, pri čemer velja $n\in\mathbb{N}_0$. Tako je krivulja v 0-tem koraku dolga $\sqrt{2}$, v prvem $2\sqrt{2}$, v drugem $4\sqrt{2}$ in tako naprej.

- **Ploščina**
  V katerem koli končnem koraku graf krivulje nima ploščine, v limiti pa ima graf krivulje ploščino 1.

Zaključek

V našem članku smo brez zapletenih dokazov konstruirali zvezno surjektivno preslikavo enotskega intervala v enotski kvadrat. Problem, ki se ga nismo lotili, je preslikava enotskega intervala v enotsko kocko. Takšne preslikave so mogoče tudi v četrto dimenzijo in tako naprej. Prav tako obravnavana krivulja ni edina možna krivulja, ki zapolni cel enotski kvadrat. Obstajajo še mnoge druge krivulje, ki zapolnijo prostor, in vse se imenujemo Peanove krivulje. Peanovo odkritje še danes uporabljajo v računalništvu, pri geografskih raziskovanjih in drugje.

Viri

[1] J. Vidrih, *Peanova krivulja* (Seminarska naloga). FMF, Ljubljana, 2012.

[2] *Giuseppe Peano*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano`, citirano dne 21. 8. 2012.