Turistična agencija Mars

Anja Drstvenšek, *Krško, Gimnazija Brežice*
Luka Lajovic, *Ljubljana, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana*
Nika Petelinšek, *Poljčane, Srednja šola Slovenska Bistrica*
David Gajser (mentor), *Duplek, Fakulteta za matematiko in fiziko*

POVZETEK
V članku so predstavljene štiri nagradne igre. Pri vseh iščemo strategijo, s katero bi kar največ kandidatov, postavljenih v vrsto, uganilo barvo svoje kape. Nekatere strategije uporabijo aksiom izbire.

Uvod

TAM je Turistična agencija Mars, ki ponuja potovanja na planete blizu Zemlje. Njen sedež se nahaja ob Bohinjskem jezeru, kjer ima pisarno tudi lastnica Marsilda. Poznana je po svojih 165 centimetrih, ki vključujejo tudi petcentimetrske petke. Ima kratko pristrižene rdeče lase, ki se zmeraj ujemajo z rdečilom na njenih polnih ustnicah. Navadno nosi siva krila do kolen, bele elegantne srajce in zlato verižico, ki ji jo je podarila mlajša sestra Marselina, sicer lastnica tekstilnega podjetja. Zaradi novih turističnih agencij, ki ponujajo poceni potovanja na planete v ozvezdju Oriona, Marsildi podjetje zadnje čase propada.

Nekega jutra je mlajša izmed sester starejši potožila, da najnovejša kolekcija kap ne gre v promet in Marsilda se je domislila čudovite ideje. Najprej je od sestre nakupila bele in črne kape, potem pa sklicala sodelavce, ki so bili navdušeni nad neverjetno iznajdljivostjo svoje nadrejene …

Prvo leto

Marsilda se je odločila, da bo nagradila nekaj bivših strank in s tem turistični agenciji naredila reklamo. Kandidate za nagrado je zbrala v skupni sobi in jim povedala, da jih bodo kmalu postavili v vrsto ter vsakemu postavili na glavo belo ali črno kapo. Pri tem bo vsak kandidat videl le barve kap vseh tistih kandidatov, ki so pred njim. Če ugane barvo svoje kape, dobi nagrado, sicer ne. Kandidati bodo ugibali barvo kape od zadnjega proti prvemu, in sicer na glas, tako da bodo vsi slišali vsakega kandidata. Naša naloga je predlagati strategijo, za katero naj se dogovorijo kandidati, da jih bo kar največ dobilo nagrado, čeprav lahko vsak izmed njih reče le "bela"ali "črna".

Strategija: Kandidati se dogovorijo, da zadnji v vrsti prešteje vse bele kape kandidatov, ki stojijo pred njim. Če je to število liho, reče "bela", če je sodo, potem reče "črna".

Predzadnji kandidat bo preštel vse bele kape pred seboj in slišal, kaj je rekel zadnji. Po primerjanju parnosti bo pravilno ugotovil barvo svoje kape. Tudi naslednji kandidat bo preštel vse kape pred seboj in slišal oba kandidata za sabo. Tako bo tudi on pravilno ugotovil barvo svoje kape, kot bomo videli v naslednjem odstavku.

Naj bo *Marko* nek kandidat, ki ni zadnji v vrsti. Ta vidi vse bele kape pred seboj in sliši, kaj rečejo kandidati, ki stojijo za njim. Ko sešteje število belih kap pred in za njim (brez zadnjega), primerja seštevek s parnostjo, ki jo je videl zadnji kandidat v vrsti. Če se parnosti ujemata, *Marko* nosi črno kapo, drugače pa belo. S to strategijo vsi, razen zadnjega v vrsti, ki ima 50 odstotkov možnosti, da zadane, pravilno uganejo barvo svoje kape in dobijo nagrado.

Slika 1: Možna postavitev kap. Kandidat pod kapo 1 prvi ugiba barvo svoje kape.

Drugo leto

Po prejšnji neuspeli akciji (podeljenih je bilo preveč nagrad) se je Marsilda odločila, da bo otežila ugibanje. Črni in beli kapi je dodala še kape devetih novih barv, tako da je bilo vseh različnih barv zdaj enajst. Ponovno je naša naloga predlagati strategijo, s katero bi čim več kandidatov pravilno uganilo barvo svoje kape in prejelo nagrado.

Strategija: Za število n označimo z $n(\text{mod } 11)$ ostanek pri deljenju števila n z 11. Kandidati najprej vsaki barvi določijo število od 0 do 10, ki jo predstavlja. Zadnji v vrsti izračuna vsoto s vseh barv kap, ki jih vidi, in pove barvo $s(\text{mod } 11)$. Naj bo *Marko* kandidat, ki ni zadnji v vrsti in naj bo t_1 vsota vseh barv kap pred njim in t_2 vsota vseh barv, ki so jih povedali kandidati za *Markom* (brez zadnjega). Število $t = t_1 + t_2$ lahko *Marko* sam izračuna. Preden pove odgovor, bo tako poznal števili $s(\text{mod } 11)$ in $t(\text{mod } 11)$. Če je število $s(\text{mod } 11) - t(\text{mod } 11)$ nenegativno, *Marko* reče barvo $s(\text{mod } 11) - t(\text{mod } 11)$, sicer pa barvo $s(\text{mod } 11) - t(\text{mod } 11) + 11$.

Uspešnost strategije: Najprej lahko pokažemo, da predzadnji kandidat pravilno ugane barvo svoje kape, nato pokažemo, da kandidat pred njim pravilno ugane barvo svoje kape … in na koncu pokažemo, da tudi prvi v vrsti pravilno ugane barvo svoje kape. Za vsakega kandidata je dokaz enak. Zato lahko predpostavimo, da vsi za *Markom* (razen morda zadnjega) pravilno uganejo barvo svoje kape. Če pokažemo, da bo z zgornjo strategijo tudi *Marko* uganil barvo svoje kape, smo pokazali, da bodo vsi razen zadnjega dobili nagrado.

Ker vsi za *Markom* pravilno uganejo barvo svoje kape, je t, definiran v strategiji, kar vsota barv kap brez *Marka* in zadnjega kandidata. Število $s - t$ torej predstavlja barvo *Markove* kape. Naj bo k količnik pri deljenju t z 11. Če je število $s(\text{mod } 11) - t(\text{mod } 11)$ nenegativno, sta količnika števil s in t pri deljenju z 11 oba enaka k. Barva *Markove* kape je torej enaka

$$s - t = 11k + (s(\text{mod } 11)) - (11k + (t(\text{mod } 11))) = s(\text{mod } 11) - t(\text{mod } 11).$$

Če pa je število $s(\text{mod } 11) - t(\text{mod } 11)$ negativno, to pomeni, da je $s = 11(k+1) + (s(\text{mod } 11))$, torej je barva *Markove* kape

$$s - t = 11(k+1) + (s(\text{mod } 11)) - (11k + (t(\text{mod } 11))) = s(\text{mod } 11) - t(\text{mod } 11) + 11.$$

Torej *Marko* ugane barvo svoje kape.

Tretje leto

Serijsko podeljevanje nagrad se je razvedelo in to leto se je na reklamno akcijo prijavilo neskončno kandidatov. Marsilda je seveda takoj spremenila pravila. Izbor nagrajencev se bo ponovno začel tako, da se bodo vsi postavili v vrsto. Obrnjeni bodo proti neskončnemu delu (tj. zadnji bo videl vse kandidate razen sebe). Tokrat bo vsak barvo svoje kape, ki bo črna ali bela, zapisal v kuverto, ki jo bodo vsi kandidati naenkrat oddali. Naša naloga je predlagati strategijo, za katero naj se dogovorijo kandidati, da jih bo le končno ostalo brez nagrade.

Strategija: Naj bo $\mathscr{P}$ množica vseh možnih postavitev kap na kandidate. Dve postavitvi iz $\mathscr{P}$ sta *ekvivalentni*, če sta od nekod naprej enaki. Za postavitev $p \in \mathscr{P}$ označimo s $[p]$ množico vseh tistih postavitev iz $\mathscr{P}$, ki so ekvivalentne p. To množico imenujemo *ekvivalenčni razred* od p. Iz vsakega *ekvivalenčnega razreda* kandidati izberejo eno postavitev.

Slika 2: Začetek neke postavitve kap iz množice $\mathscr{P}$.

Ko bodo kandidati v sobi, bodo vsi videli neskončni del trenutne postavitve kap in bodo vedeli, v katerem *ekvivalenčnem razredu* se ta postavitev nahaja. Naj bo q vnaprej izbrani predstavnik tega ekvivalenčnega razreda. Vsak kandidat bo povedal tisto barvo kape, ki bi jo imel, če bi bila njihova postavitev q. Ker je trenutna postavitev ekvivalentna q, imata skupen konec, torej bodo od nekod naprej vsi pravilno uganili barvo svoje kape.

Četrto leto

Nagradna igra je tudi tokrat pritegnila neskončno kandidatov. Direktorica Marsilda se je odločila, da bo ugibanje še otežila – na voljo bo neskončno barv. Ponovno je naša naloga predlagati strategijo, za katero naj se dogovorijo kandidati, da jih bo le končno ostalo brez nagrade.

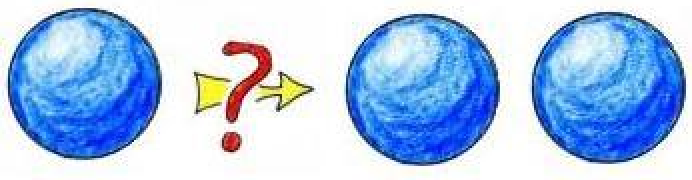
Strategija: Strategija je popolnoma enaka, kot je bila prejšnje leto. Ponovno vsi, razen končno mnogo kandidatov, prejmejo nagrado.

Aksiom izbire

Vsako leto je nagrado prejela velika večina kandidatov. Še posebej zanimivo je, da tretje in četrto leto nagrade ni prejelo le končno kandidatov. To nam je omogočil *aksiom izbire*. Uporabili smo ga, da so si kandidati lahko izbrali predstavnika vsakega ekvivalenčnega razreda.

Aksiom izbire: Za vsak nabor nepraznih množic lahko iz vseh množic naenkrat izberemo po en element.

Aksiom izbire nam je torej omogočil nepričakovano uspešno strategijo. Ampak to ni edina nepričakovana posledica tega aksioma. Še bolj znana posledica je paradoks Banach-Tarskega. Ta nam pove, da lahko kroglo razstavimo na 5 delov, te dele obračamo in premikamo ter s tem dobimo dve krogli, ki sta identični začetni krogli.



Slika 3: Paradoks Banach-Tarskega.

Zaključek

Sprva je Marsilda želela nagrajence brezplačno poslati na rdeči planet, a se zaradi prevelikega števila podeljenih nagrad za to ni odločila. Raje jih je peljala v CŠOD Bohinj, kjer Mars trenutno gostuje. Okoljevarstvenike skrbi, da bo neskončno število turistov povzročilo hudo ekološko škodo v Bohinju.

Marsildina sestra Marselina se je zaradi naročila neskončnega števila kap preusmerila v množično tekstilno proizvodnjo kap vseh barv in se na lestvici stotih najbogatejših revije Forbes uvrstila na 5. mesto. Njeno bogastvo je ocenjeno nekje med neskončno in neskončno na kvadrat.

Viri

[1] G. Muller, *The Axiom of Choice is Wrong*, `http://cornellmath.wordpress.com/2007/09/13/the-axiom-of-choice-is-wrong/`, citirano dne 22. 8. 2013.

[2] Theorem 7: the Banach-Tarski paradox, `http://theoremoftheweek.wordpress.com/2009/09/07/theorem-7-the-banach-tarski-paradox/`, citirano dne 22. 8. 2013.