Dobrodošli v Hotelu neskončno

Tilen Lučovnik, *Ljubljana, Gimnazija Vič*
Špela Pušnik, *Velenje, Gimnazija Velenje*
Tisa Ževart, *Velenje, Gimnazija Slovenj Gradec*
Jana Vidrih (mentorica), *Ptuj, Fakulteta za matematiko in fiziko*

POVZETEK

Pogledali si bomo števno neskončne množice in dokazali, da so množice $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ *in* $\mathbb{Q}$ *enako močne (imajo enako število elementov). S Cantorjevim diagonalnim dokazom bomo pokazali, da so realna števila neštevno neskončna.*

Uvod

Mars je vedno bolj popularna turistična destincija. Povpraševanje se izjemno hitro povečuje, zato so tam zgradili Hotel neskončno, hotel z neskončno enoposteljnimi sobami. Ta se je začel hitro polniti in se je nekega dne tudi napolnil. Poleg vseh običajnih postopkov na recepciji, so bili vsi gostje primorani podpisati izjavo, da bodo ubogali vse ukaze, ki jih bodo dobili preko zvočnika, tudi če bodo zelo nenavadni. Tisti dan, ko se je hotel napolnil je prišla petčlanska družina. Ker je pred hotelom visel napis "Proste sobe", so zahtevali svojo sobo. Receptor jim je ugodil, naslednji dan pa ga je čakala še težja naloga. Najprej se je pripeljala vesoljska ladja z neskončno potniki, nato pa še neskončno vesoljskih ladij, vsaka z neskončno potniki. Receptor je bil v vseh primerih dolžan sprejeti vse goste v hotel. Kako?

Množice

Pri reševanju naloge, opisane v uvodu, smo si pomagali z množicami. Poznamo končne in neskončne množice. *Moč* končne množice je enaka številu elementov, ki jih množica vsebuje. Dve množici imata enako moč, če vsebujeta enako število elementov. Množica $\{\bigstar, \clubsuit, \heartsuit, \bullet\}$ ima enako moč kot množica z elementi $\{1,2,3,4\}$. Moč obeh množic je 4.

Najbolj "vsakdanja"neskončna množica je množica naravnih števil, množica števil s katerimi štejemo. Množice, ki imajo enako število elementov kot množica naravnih števil, imenujemo *števno neskončne množice.* Neskončne množice, ki imajo večjo moč, pa so *neštevne.* Da bomo lahko ugotovili, kdaj imata dve množici enako elementov, definiramo bijektivno preslikavo. Preslikava iz množice A v množico B je *bijektivna,* če je vsak element iz množice B slika natanko enega elementa iz množice A. Množica je števno neskončna, če jo bijektivna preslikava preslika na množico naravnih števil. Rečemo lahko tudi, da je množica števna, če lahko vse elemente postavimo v neko zaporedje. Moč števno neskončne množice je enaka $\aleph_0$, kar preberemo *alef nič.*

Za lažje razumevanje pojma moči množic si najprej poglejmo nekaj osnovnih primerov. Če je neka množica podmnožica, še ne pomeni, da ima tudi manjšo moč. Čeprav je množica sodih naravnih števil podmnožica naravnih števil, imata obe množici isto moč. Da bi dokazali to izjavo, moramo skonstruirati bijekcijo med danima množicama. Preslikava f naj bo podana z naslednjim predpisom:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow 2\mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

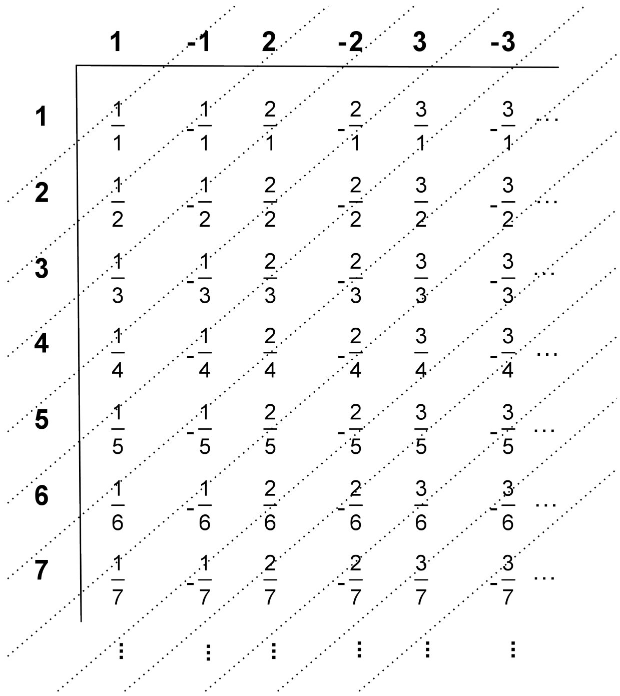
Preslikava f številu 1 priredi število 2, številu 2 število 4, številu 3 število 6 in tako naprej. Na ta način smo vsakemu naravnemu številu priredili natanko eno sodo število in vsakemu sodemu natanko eno naravno število. Da je množica sodih števil števno neskončna, bi lahko dokazali tudi tako, da bi soda števila uredili v zaporedje $2,4,6,8\ldots$ Zapis v zaporedje je ekvivalenten iskanju bijekcije z množico $\mathbb{N}$.

Prav tako so števna tudi cela števila $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Vsakemu celemu številu lahko priredimo natanko eno naravno število s tem, da jih uredimo v zaporedje

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

Racionalna števila

Množica racionalnih števi je števno neskončna. To bomo dokazali s pomočjo tabele na sliki 1.



Slika 1: Dokaz števne neskončnosti množice racionalnih števil

V prvi vrstici tabele so vsa cela števila, zapisana po prejšnjem zaporedju, brez števila 0, v prvem stolpcu pa vsa naravna števila. Ostala števila dobimo z deljenjem celih števil z naravnimi. Tako dobimo vsa racionalna števila razen 0.

Razvrstimo sedaj racionalna števila v zaporedje. Prvi člen zaporedja je 0, naslednje člene pa določamo po diagonalah. Na prvi diagonali je en člen 1, na drugi sta dva člena: $\frac{1}{2}$ in -1, na tretji so trije členi: $\frac{1}{3}$, -$\frac{1}{2}$ in 2. Člene na vsaki diagonali po vrsti od spodaj navzgor zapisujemo v zaporedje. Členov, ki smo jih že izpisali, ne izpisujemo več. Ulomka $\frac{1}{1}$ in $\frac{2}{2}$ sta enaka, zato ulomka $\frac{2}{2}$ ne izpišemo. Zapišimo prvih nekaj členov zaporedja.

$$0, 1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ -2,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ 3,\ \frac{1}{6},\dots$$

Realna števila in Cantorjev diagonalni dokaz

Najpreprostejši zgled neštevne množice je množica realnih števil $\mathbb{R}$. Da realnih števil ni števno neskončno je leta 1877 dokazal Georg Ferdinand Cantor. Njegov dokaz nam pove, da je realnih števil več kot naravnih, čeprav sta obe množici neskončni.

Izrek. *Interval* $[0,1]$ *ni števno neskončen.*

Predpostavimo, da interval $[0,1]$ je števno neskončen. Potem lahko števila iz tega intervala označimo z $r_1, r_2, r_3 \dots$, saj jih lahko uredimo v zaporedje. Vsa števila r_i, za $i \in \mathbb{N}$ podamo v desetiškem zapisu, pri čemer za števila, ki imajo dva različna desetiška zapisa (npr. $0,6999\ldots = 0,7000\ldots$), uporabimo zapis, ki se končuje z deveticami. Vzemimo primer tega zaporedja realnih števil:

$$r_1 = 0,\mathbf{6}2985765\ldots$$

$$r_2 = 0,3\mathbf{5}634274\ldots$$

$$r_3 = 0,72\mathbf{9}38906\ldots$$

$$r_4 = 0,672\mathbf{9}8331\ldots$$

$$r_5 = 0,1426\mathbf{5}386\ldots$$

$$r_6 = 0,98564\mathbf{3}52\ldots$$

$$r_7 = 0,214357\mathbf{4}6\ldots$$

$$r_8 = 0,6453218\mathbf{5}\ldots$$

$$\vdots$$

Iz tega zaporedja skonstruiramo novo število x tako, da pogledamo k-to števko za desetiško vejico v zapisu k-tega števila r_k. Torej pri številu r_1 pogledamo prvo decimalko, pri r_2 drugo, pri r_{17} pa sedemnajsto decimalko. Če je ta k-ta števka števila r_k enaka 5, bo k-ta števka števila x enaka 4, če pa k-ta števka r_k ni enaka 5, bo k-ta števka števila x enaka 5. Tako bomo dobili realno število x iz intervala $[0,1]$. Iz zgornjega primera bi na primer skonstruirali takšno število:

$$x = 0,54554554\ldots \in [0,1].$$

Ker smo na začetku predpostavili, da zaporedje $r_1, r_2, r_3, \ldots$ zajame vsa realna števila na intervalu $[0,1]$, bi moral obstajati tudi nek $n \in \mathbb{N}$, da bi bil $x = r_n$. Zaradi načina izbire števk števila x, pa se x od r_n razlikuje vsaj v števki na n-tem mestu. Od števila r_1 se na primer razlikuje v prvi števki, od števila r_2 v drugi itd. To pomeni, da števila x v zaporedju $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ni. Torej v zaporedju niso oštevilčena vsa realna števila iz intervala $[0,1]$. S tem pridemo do protislovja z našo predpostavko iz začetka dokaza, da je interval [0,1] števno neskončen in lahko njegove elemente uredimo v zaporedje. S tem smo pokazali da interval $[0,1]$ ni števno neskončen.

Posledica. *Moč množice realnih števil je večja od moči množice naravnih števil, tj.* $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

Ker vemo, da je $|[0,1]| > |\mathbb{N}|$, je dovolj pokazati $|[0,1]| = |\mathbb{R}|$. Poiščimo torej bijektivno preslikavo, ki preslika interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$. To lahko naredimo s kompozitumom dveh bijektivnih preslikav. Najprej interval $[0,1]$ preslikamo v interval $(0,1)$ s funkcijo f.

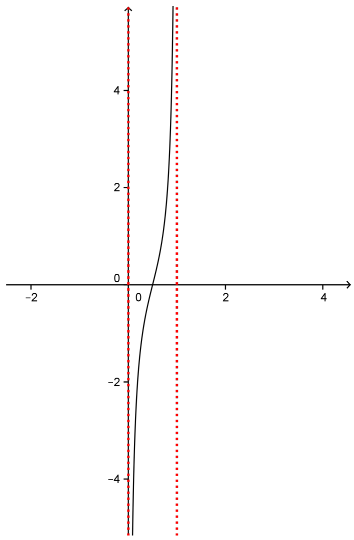
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & x = 0 \\ \frac{1}{3}; & x = 1 \\ \frac{1}{n+2}; & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ x; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Funkcija f število 0 preslika v $\frac{1}{2}$, 1 v $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ v $\frac{1}{4}$. Podobno kot $\frac{1}{2}$ preslikamo tudi druga števila oblike $\frac{1}{n}$; imenovalcu ulomka prištejemo 2. Vsa ostala števila preslikamo sama vase.

Zdaj poiščimo še bijektivno preslikavo iz intervala $(0,1)$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$. To naredimo s funkcijo g, ki je podana z:

$$g(x) = \frac{\frac{1}{2} - x}{x(x-1)}$$

Kompozitum $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je bijektiven, torej imata množici $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ enako moč. Iz tega sledi, da je tudi množica realnih števil $\mathbb{R}$ neštevno neskončna, torej ima večjo moč od množice naravnih števil $\mathbb{N}$.



Slika 2: Graf bijektivne funkcije g, ki preslika interval $(0,1)$ v realna števila.

Hotel neskončno

Ko je prišla v hotel petčlanska družina je bil hotel že poln. Receptor jim je moral dodeliti sobe. Po zvočniku je sporočil, da naj se vsak gost pomakne za 5 sob naprej. Člani družine so dobili sobe od 1 do 5.

Nekega dne pa je prispela vesoljska ladja z neskončno potniki. Receptor je moral najti novo rešitev. Vsem gostom v hotelu je ukazal, da pomnožijo številko svoje sobe z 2 in poiščejo sobo z dobljeno številko. Nove goste je razporedil v sobe z lihimi številkami.

To je delovalo, dokler ni prišlo neskončno ladij, vsaka z neskončno potniki. Receptorja je to najprej presenetilo in ni vedel, kaj naj stori, po premisleku pa se je spomnil rešitve. Najprej je goste v hotelu ponovno premestil v sobe s sodimi številkami in tako izpraznil neskončno sob z lihimi številkami. Vsak potnik v ladji ima določeno številko ladje in številko sedeža v ladji. Receptor je gostom ukazal, naj seštejejo številko svoje ladje in sedeža. Nato jim je delil ključe praznih (lihih) sob po zaporedju njihove izračunane vsote. Najprej je sobo dobil prvi potnik iz prve ladje, ki je imel vsoto enako 2. Za njim sta sobi dobila potnika z vsoto 3 in za njima še ostali po naraščajočem zaporedju izračunane vsote $4, 5, 6, \ldots$ Vsak gost je tako pred seboj imel le končno drugih gostov in je vedel, da bo v končnem času dobil svoj ključ.

	1	2	3	4	5	6	⋯
1	2	3	4	5	6	7	⋯
2	3	4	5	6	7	8	⋯
3	4	5	6	7	8	9	⋯
4	5	6	7	8	9	10	⋯
5	6	7	8	9	10	11	⋯
6	7	8	9	10	11	12	⋯
7	8	9	10	11	12	13	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Tabela 1: Številke v prvi vrstici predstavljajo številko sedeža v ladji, številke v prvem stolpcu pa številko ladje. V tabeli je za vsakega potnika napisana vsota teh dveh števil.

Viri

[1] N. Casey, *Welcome to the Hotel Infinity!*, `http://www.ccs3.lanl.gov/mega-math/workbk/infinity/inhotel.html`, citirano dne 19. 8. 2013.

[2] *Števna množica*, `http://sl.wikipedia.org/wiki/stevna_mnozica`, citirano dne 19. 8. 2013.

[3] *Cantorjev diagonalni dokaz*, `http://sl.wikipedia.org/Cantorjev_diagonalni_dokaz`, citirano dne 19. 8. 2013.