Naključni sprehodi po $\mathbb{Z}^n$

Lenart Dolinar, Katarina Grilj, Matija Likar
Mentor: David Opalič

Povzetek

S pomočjo Markovskih verig bomo opazovali naključne sprehode po $\mathbb{Z}^n$. S kriteriji konvergence neskončnih vrst bomo določili, ali se skoraj zagotovo neskončnokrat vrnemo v izhodišče ali ne.

1 Uvod

Pri našem projektu smo opazovali lastnosti diskretnih naključnih sprehodov po $\mathbb{Z}^n$. Začnemo v izhodišču in se v vsakem koraku naključno premaknemo za enoto v eni izmed $2n$ ortogonalnih smeri.

Zanimala nas je verjetnost, da se bomo neskončnokrat vrnili v izhodiče, če se sprehajamo v nedogled. Opazovali smo simetrične sprehode, ko je verjetnost premika v vsako izmed smeri enaka, kot tudi asimetrične sprehode, kjer so premiki v neko smer bolj verjetni od drugih.

Ugotovili smo, da lahko vse možne položaje v $\mathbb{Z}^n$ predstavimo kot množico stanj, sprehod pa kot Markovsko verigo na njej. S pomočjo prehodne matrike smo opisali prehode v Markovski verigi ter definirali relacijo povezanosti,

ki množico stanj razdeli na ekvivalenčne razrede. Prav tako smo definirali pojme minljivosti oz. povrnljivosti stanja ter verjetnost vrnitve.
Z opazovanjem konvergence neskončne vsote smo lahko odgovorili na vprašanje - ali se bomo v izhodišče vračali neskončnokrat? Začeli smo v eni dimenziji - na celoštevislki premici, nato smo svojo rešitev posplošili še na celoštevilsko ravnino, za konec pa smo še omenili, kako je s sprehodi v treh dimenzijah.

2 Markovske verige

Naj bo $I = \{i_0, i_1, i_2, ...\}$ števna množica. Vsak $i_n \in I$ imenujemo **stanje**, I pa **množica stanj**.
Naj bo $X_0, X_1, X_2, ...$ zaporedje slučajnih spremenljivk, kjer za vsak n, X_n zavzame vrednost $i \in I$.

Definicija 1. *Zaporedje $X_0, X_1, X_2, ...$ je* ***Markovska veriga****, če zadošča* ***lastnosti Markova****:*

$$\mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}).$$

Intuitivno lastnost Markova pravi, da je prehod v naslednje stanje neodvisen od preteklih stanj oz. ga določa zgolj trenutno stanje.

Definicija 2. ***Čas ustavljanja*** *je nenegativna celoštevilska naključna spremenljivka, kjer je dogodek $\{T = n\}$ za vse $n \geq 0$ odvisen zgolj od dosedanjih stanj $X_0, X_1, ..., X_n$.*

Primer časa ustavljanja je čas prvega obiska nekega stanja, saj ga v celoti definirajo dosedanji dogodki.

$$\{T_i = n\} = \{X_0 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\}$$

Izrek 1. ***Krepka lastnost Markova*** *Naj bo $X_0, X_1, X_2, ...$ Markovska veriga in T čas ustavljanja, vezan na to verigo. Če je $T < \infty$, je zaporedje nakjučnih spremenljivk $X_T, X_{T+1}, ...$ prav tako Markovska veriga, ki je neodvisna od $X_0, X_1, ..., X_{T-1}$.*

Krepka lastnost Markova je precej tehnična stvar in sledi iz navadne lastnosti Markova. Vendarle pa jo je smiselno izpostaviti, saj jo bomo uporabili kasneje pri dokazovanju.

Definicija 3. ***Prehodna matrika*** *je matrika* $P = \{P_{ij} : i, j \in I\}$*, kjer je* $P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$ *verjetnost, da bomo v naslednjem koraku prešli v stanje* i*, če smo trenutno v stanju* j*.*

Za prehodno matriko P velja

$$0 \leq P_{ij} \leq 1,$$

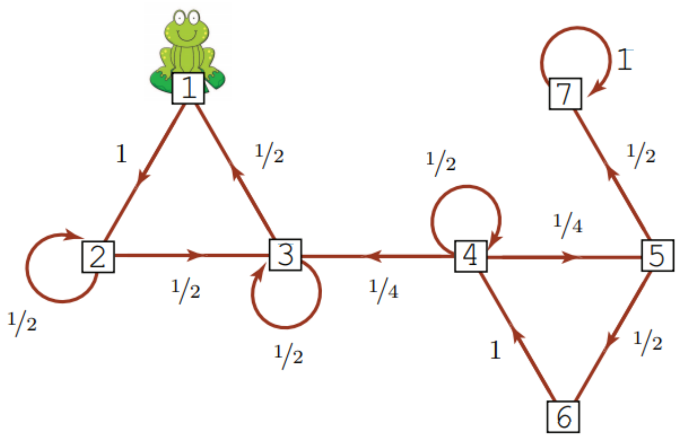
$$\sum_j P_{ij} = 1.$$

Iz lastnosti Markova sledi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) \\
=&\mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \\
=&p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}
\end{aligned}$$

S $p_{ij}^{(n)}$ označimo verjetnost, da v n korakih dosežemo stanje j, če začnemo v stanju i. Velja naslednja zveza - **Chapman-Kolmorogova enačba**

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(a)}\, p_{kj}^{(b)}\ , \ \forall a, b \in \mathbb{N}_{\geq 0}\, ,\ a + b = n.$$



Slika 1: Naključni sprehod vesele žabice po lokvanjih.

Ponazorimo prehodno matriko na primeru. Imamo žabico, vidno na sliki 1, ki naključno skače med lokvanji. Verjetnost skoka med lokvanji definira naslednja matrika

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recimo, da žabica začne na lokvanju 1. V prvem koraku se bo gotovo premaknila na lokvanj 2. V drugem koraku bo z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ ostala na istem lokvanju, v nasprotnem primeru pa bo skočila na lokvanj 3.
Pravimo, da stanje i **vodi** v stanje j, če obstaja tak $n \geq 0$, da $p_{ij}^{(n)} > 0$. To lastnost označimo z $i \to j$. Za stanji i in j pravimo, da sta povezani, če $i \to j$ in $j \to i$. Bralec se lahko prepriča, da je slednja relacija ekvivalenčna. Posledično množica stanj razpade na ekvivalenčne razrede.

Definicija 4. *Ekvivalenčni razred C je **zaprt**, če $\forall i \in C, i \to j \implies j \in C$. Ekvivalenčni razred C je **odprt**, če ni zaprt.*

Za zaprte razrede velja, da če se v nekem trenutku nahajamo v tem razredu, bomo ostali v njem.
Nasprotno pa z verjetnostjo 1 sčasoma zapustimo vsak odprt razred.

Kot primer lahko uporabimo veselo žabico, ki skače po lokvanjih. Hitro opazimo, da, ko bo le-ta enkrat priskakala do lokvanja 7, ga ne bo več zapustila. Lokvanji 1, 2, 3 prav tako tvorijo svoj zaprti razred. Po drugi strani pa lokvanji 4, 5, 6 tvorijo odprti razred in jih bo žabica sčasoma z verjetnostjo 1 zapustila.

3 Povrnljivost in minljivost stanj

Označimo s $\mathbb{P}_i(A)$ verjetnost, da se zgodi dogodek A, če začnemo v stanju i.

Definicija 5. ***Čas vrnitve**: $T_i = min\{n \geq 1 | X_n = i\}$.*

Definicija 6. ***Verjetnost vrnitve v stanje** i: $f_i = \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$.*

Definicija 7. ***Število obiskov v stanju*** *i: $V_i = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=i\}}$.*

Definicija 8. *Stanje i je* ***povrnljivo****, če velja $\mathbb{P}(V_i = \infty) = 1$. Stanje i je* ***minljivo****, če ni povrnljivo.*

Dokažemo lahko, da so v določenem razredu vsa stanja povrnljiva ali pa vsa minljiva. Torej je povrnljivost oziroma minljivost lastnost celotnega razreda.

4 Izreki

V tem delu bomo dokazali nekaj izrekov, s pomočjo katerih bomo dokazovali povrnljivost oziroma minljivost nekaterih naključnih sprehodov.

Lema 1. $\mathbb{P}_i(V_i \geq k+1) = f_i^k$.

Dokaz. Dokažimo lemo s pomočjo indukcije na k. Za $k = 0$ velja

$$\mathbb{P}_i(V_i \geq 1) = 1 = (f_i)^0$$

Vzemimo $k \geq 1$ in predpostavimo, da zgornji izraz velja za $k-1$. Zaradi krepke lastnosti Markova

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(V_i \geq k+1) =& \mathbb{P}_i(V_i \geq k+1 | V_i \geq k)\, \mathbb{P}_i(V_i \geq k) \\
=& \mathbb{P}_i(V_i \geq 1) f_i^{k-1} \\
=& \mathbb{P}_i(T_i < \infty) f_i^{k-1} \\
=& f_i^k.
\end{aligned}$$

□

Naslednji izrek nam pokaže povezavo med povrnljivostjo stanja i ter verjetnostjo vrnitve v i.

Izrek 2. *Imamo naslednjo dihotomijo*

$$\begin{aligned}
\textit{Stanje } i \textit{ je minljivo} &\iff f_i < 1 \\
\textit{Stanje } i \textit{ je povrnljivo} &\iff f_i = 1.
\end{aligned}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(V_i < \infty) =& \mathbb{P}_i\left(\bigcup_{k\geq 1} V_i = k\right) \\
=& \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_i = k) \\
=& \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_i \geq k \backslash V_i \geq k+1) \\
=& \sum_{k=1}^{\infty} (1-f_i) f^{k-1} = \begin{cases} 0, & f_i = 1 \\ 1, & f_i = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Oglejmo si še povezavo med povrnljivostjo stanja i in vsoto verjetnosti, da se vrnemo nazaj v i po n korakih. Ker lahko to verjetnost pogosto izračunamo, nam izrek predstavlja dobro orodje za testiranje povrnljivosti in ga bomo uporabljali tudi pri kasnejšem preučevanju.

Izrek 3. *Imamo naslednjo dihotomijo*

$$\text{Stanje } i \text{ je povrnljivo} \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

$$\text{Stanje } i \text{ je minljivo} \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

Dokaz. Če je stanje i povrnljivo, velja $\mathbb{P}_i(V_i = \infty) = 1$. Iz tega lahko sklepamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right) \\
&= \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right) \\
&= \mathbb{E}_i(V_i) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Če je stanje i minljivo, velja $f_i < 1$. Zapišemo lahko

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= \mathbb{E}_i(V_i) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_i > r) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} f_i^r \\ &= \frac{1}{1-f_i} < \infty.\end{aligned}$$

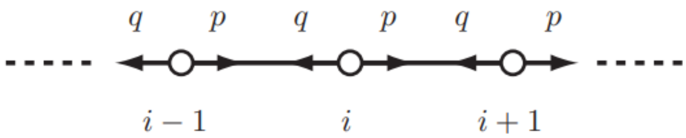
□

5 Naključni sprehodi

Definicija 9. ***Naključni sprehod po*** $\mathbb{Z}^n$ *je naključni proces, pri katerem se premikamo po celoštevilski mreži. Na vsakem koraku se naključno premaknemo na eno od točk oddaljenih za 1. Naključni sprehod je* ***simetričen****, če je verjetnost premika v vsako smer enaka.*

Pri naključnih sprehodih po $\mathbb{Z}^n$ lahko pridemo iz kateregakoli stanja v katerokoli stanje, zato so vsa stanja v istem razredu in ta razred je lahko povrnljiv ali ne. Torej ima smisel govoriti o povrnljivosti oziroma minljivosti naključnega sprehoda. Brez škode za splošnost naš sprehod vedno začnemo v 0.

5.1 Naključni sprehod po $\mathbb{Z}$



Slika 2: Naključni sprehod po $\mathbb{Z}$.

Najprej si poglejmo sprehod po $\mathbb{Z}$. Kot smo pokazali zgoraj, je dovolj poračunati, ali $\Sigma_n p_{00}^{(n)}$ konvergira. Ni težko opaziti, da se po lihem številu korakov ne moremo vrniti do izhodišča. Torej je $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Verjetnost vrnitve v sodem številu korakov pa je naslednja: Da se vrnemo v začetno točko, moramo imeti isto število premikov v levo in v desno, torej je verjetnost enega takega sprehoda $p^n q^n$. Število takih zaporedij je $\binom{2n}{n}$, saj izmed $2n$ premikov lahko izberemo n premikov v desno smer. Torej je verjetnost prihoda nazaj v 0 po $2n$ korakih ravno $p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

Izrek 4. *Stirlingova aproksimacija*

$$n! \sim A\sqrt{n}(n/e)^n, \quad A \in [1, \infty), \quad n \to \infty.$$

S pomočjo Stirlingove aproksimacije ocenimo

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \sim \frac{(4pq)^n}{A\sqrt{n/2}}.$$

V simetričnem primeru, kjer $p = q = 1/2$, je $4pq = 1$ in torej obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq N$

$$p_{00}^{(2n)} \geq \frac{1}{2A\sqrt{n}},$$

iz česar sledi, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} \geq \sum_{n=N}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geq \frac{1}{2A} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty,$$

torej se bomo skoraj zagotovo neskončnokrat vrnili v začetno točko.

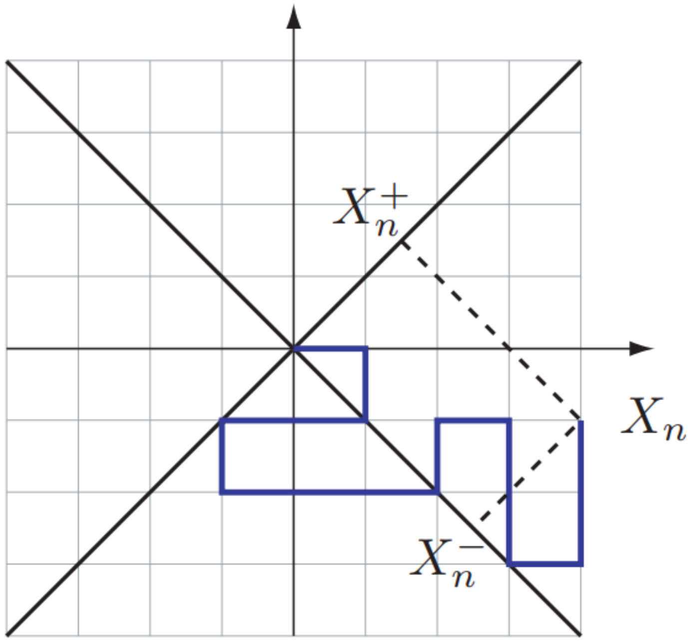
Drugače pa je v primeru, če sta p in q različna, torej da verjetnost premika v levo in desno ni enaka. V tem primeru je $4pq = r < 1$. Podobno kot prej za nek $N \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{n=N}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \leq \frac{1}{A} \sum_{n=N}^{\infty} r^n < \infty,$$

s čimer smo dokazali, da se skoraj zagotovo ne bomo neskončnokrat vrnili v začetno točko.

5.2 Naključni simetrični sprehod na $\mathbb{Z}^2$

Obravnavamo le simetrični sprehod, torej imamo v enem koraku $\frac{1}{4}$ možnosti za premik v vsako izmed štirih smeri.



Slika 3: Naključni sprehod v $\mathbb{Z}^2$.

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ če } |i-j| = 1, \\ 0, \text{ sicer} \end{cases}$$

Označimo sprehod z X_n in njegovi pravokotni projekciji na diagonali $y = +x$ in $y = -x$ kot ${X_n}^+$ ter ${X_n}^-$, zaporedoma. Ni težko pokazati, da sta ${X_n}^+$ in ${X_n}^-$ neodvisna simetrična sprehoda po $\mathbb{Z}$, te pa smo obravnavali že zgoraj. Opazimo, da $X_n = 0$ natanko tedaj, ko ${X_n}^- = 0$ in ${X_n}^+ = 0$. Znova uporabimo Stirlingovo aproksimacijo, da izračunamo

$$p_{00}^{(2n)} = \left(\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right)^2 \sim \frac{2}{A^2 n}.$$

Iz podobnosti z

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

sledi, da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty,$$

kar pomeni, da je skoraj zagotovo število vrnitev v začetno točko neskončno.

5.3 Naključni simetrični sprehod v višjih dimenzijah

Poglejmo si še naključne simetrične sprehode v višjih dimenzijah. Po $\mathbb{Z}^3$ je pristop podoben kot v eni dimenziji, vendar je štetje možnih poti in računanje neskončne vrste mnogo težje, zato ga tu ne bomo izpeljali. Izkaže se, da je po $\mathbb{Z}^3$ minljiv, verjetnost vrnitve pa 0.340537... Ker lahko sprehod v višjih dimenzijah vedno projeciramo na $\mathbb{Z}^3$, vemo, da so tudi simetrični sprehodi v višjih dimenzijah minljivi. Podobno lahko iz tega, da so asimetrični sprehodi že v prvi dimenziji minljivi, sklepamo, da so minljivi v vseh dimenzijah.

6 Zaključek

Ugotovili smo, da se naključni simetrični sprehodi po $\mathbb{Z}$ ter $\mathbb{Z}^2$ neskončnokrat vrnejo v izhodišče z verjetnostjo 1. Drugače pa je v $\mathbb{Z}^3$, kjer se skoraj zagotovo v nekem trenutku izhodišče obiščemo zadnjič. Pokazali smo tudi, da so asimetrični sprehodi v vseh dimenzijah minljivi.
Ponazorimo naše ugotovitve še na primerih iz "resničnega življenja". Predpostavimo, da smo se odpravili v kazino in želimo svoje znanje verjetnosti izkoristiti v svoj prid. Za poljubno stavo pri ruleti obstaja večja možnost, da stavo izgubimo, kot da jo dobimo. Naše stave lahko ponazorimo kot sprehod po $\mathbb{Z}$, kjer stanja predstavlja naše dobroimetje. Ker je verjetnost, da stavo izgubimo, večja od verjetnosti, da zmagamo, bomo po velikem številu iger prišli do stanja 0, kjer bankrotiramo. Celo v idealnem primeru poštenega kazinoja, kjer je polovična možnost, da dobimo zmago, bomo prav tako bankrotirali, saj smo dokazali, da se bomo z verjetnostjo 1 vrnili v 0.
Poglejmo si še en primer. Denimo, da smo začeli svoj sprehod v Manhattnu, vendar smo se na poti izgubili in ne najdemo več poti nazaj. Kot nadobudni matematik (vendar ne preveč nadobudni navigator) se lahko potolažimo ob dejstvu, da se ob neskončnem simetričnem sprehodu v $\mathbb{Z}^2$ skoraj zagotovo vrnemo v izhodišče.

Literatura

[1] R. Weber, *Makov Chains*, DMFA, Ljubljana, 2012, dostopno na `http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/markov/M.pdf`.

[2] *Markov Chain*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 30. 7. 2021], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain`.

[3] *Random Walk*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 30. 7. 2021], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk`.