Uvod v finančno matematiko

Eva Juvanc, Daniil Gainullov, Jan Marn
Mentor: Jakob Svetina

Povzetek

Pri našem projektu smo želeli spoznati osnovne pojme finančne matematike in si pobliže pogledati obresti in obveznice. S preprostimi primeri smo poskusili ljudem približati tudi to ”zelo zanimivo” vejo matematike.

1 Uvod

Finančna matematika se, kot že ime pove, ukvarja s finančnim delom matematike. Je zelo mlada veja, saj je postala prava veja šele leta 1970. Ubada se s finančnimi inštrumenti kot so obresti, obveznice, terminske pogodbe, delnice ipd. Obstaja tudi možnost študija finančne matematike, ki jo ponuja tudi naša Fakulteta za matematiko in fiziko.

Mi smo se osredotočili predvsem na obresti in obveznice, ki smo jih želeli predstaviti na preprostejši način, zato da bi jih lahko razumeli tudi tisti, ki niso rojeni matematiki. Razložili bomo tudi, zakaj 100 € danes ni vrednih enako kot 100 € jutri.

2 Obresti

Kot smo že ugotovili, se vrednost denarja skozi čas spreminja. Do tega lahko pride zaradi inflacije, lahko pa zaradi pametno ali nespametno vloženih sredstev. Denarni depoziti prinašajo obresti, če si denar izposodimo, pa ga moramo vrniti z obrestmi.

Včasih nas zanima, koliko bo naš denar vreden v prihodnosti, včasih pa, koliko denarja potrebujemo danes, da bomo v prihodnosti imeli željeno vsoto.

Za lažje računanje vpeljemo 2 faktorja: **obrestovalni faktor** $A(0,t)$, ki nam pove, koliko bo v času t v prihodnosti vreden 1 naložen danes, in **diskontni faktor** $D(0,t)$, ki nam pove, koliko moramo naložiti danes, da bomo v času t v prihodnosti imeli 1. Velja $A(0,t) \cdot D(0,t) = 1$.

Seveda nas včasih izračuni zanimajo tudi za kaj drugega kot 1, zato bomo željeno vrednost N_t dobili tako, da vrednost, ki jo imamo – N_0, pomnožimo z ustreznim faktorjem:

$$N_t = N_0 \cdot A(0,t)$$

ali

$$N_t = N_0 \cdot D(0,t).$$

Oglejmo si še, kakšna sta obrestovalni in diskontni faktor pri različnih načinih obrestovanja.

Pri **navadnem obrestovanju** z **navadno obrestno mero** R se po vsakem določenem časovnem obdobju obrestuje le glavnica. Velja

$$A(0,t) = 1 + R \cdot t$$

in

$$D(0,t) = \frac{1}{1 + R \cdot t}.$$

Čas t merimo v letih. Obresti lahko pripisujemo večkrat letno, torej k-krat letno. Zaradi praktičnih razlogov je navadno $k \in \{1, 2, 4, 12, 365, \ldots\}$. Taka obrestovanja zaporedoma imenujemo **letno** ali **enostavno**, **polletno, četrtletno, mesečno** in **dnevno** obrestovanje. Ker je t čas v prihodnosti, je $t > 0$. Čas t lahko zapišemo tudi kot $t = \frac{h}{k}$, kjer k že poznamo, $h \in \mathbb{N}$ pa nam pove, skozi koliko ciklov obrestovanja gremo.

Prej opisanega navadnega obrestovanja v naravi ne srečamo več, srečamo pa **obrestno obrestovanje**, pri katerem obresti pripišemo glavnici in jih nato skupaj obrestujemo. Poznamo **diskretno** in **zvezno obrestno obrestovanje**

Pri diskretnem obrestovanju obresti pripišemo k-krat letno. Obrestovalni in diskontni faktor sta

$$A\left(0,\frac{h}{k}\right)=\left(1+\frac{R_k}{k}\right)^h$$

in

$$D\left(0,\frac{h}{k}\right)=\left(1+\frac{R_k}{k}\right)^{-h}.$$

Obrestna mera R_k je **nominalna obrestna mera**. Če želimo primerjati obrestovanje z različnimi pogostostmi pripisovanja obresti, uvedemo **efektivno obrestno mero** R_E:

$$R_E=\left(1+\frac{R_k}{k}\right)^k-1.$$

Efektivna obrestna mera nam pove, kakšni obrestni meri ob enostavnem obrestovanju ustreza obrestna mera R_k.

Z nekaj obračanja enačb ugotovimo, da velja

$$A\left(0,\frac{h}{k}\right)=\left(1+\frac{R_k}{k}\right)^h=(1+R_E)^{\frac{h}{k}}$$

in

$$D\left(0,\frac{h}{k}\right)=\left(1+\frac{R_k}{k}\right)^{-h}=(1+R_E)^{-\frac{h}{k}}.$$

Pri zveznem obrestovanju obresti pripisujemo, kakor pogosto se da, zato ga izpeljemo kot limito diskretnega obrestovanja, ko pošljemo $k\to\infty$. Ker je nominalna obrestna mera R neodvisna od k, velja

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{R}{k}\right)^k=e^R.$$

Nominalna obrestna mera R se pri zveznem obrestovanju imenuje tudi **moč obresti**. Efektivno obrestno mero izračunamo kot

$$R_E=e^R-1,$$

obrestovalni in diskontni faktor pa sta

$$A(0,t)=e^{Rt}$$

in

$$D(0,t)=e^{-Rt}.$$

V praksi pogosto opazimo, da se obrestne mere glede na dolžino obdobja spreminjajo. Za daljša obdobja so večinoma višje, za krajša pa nižje. Da pri kompleksnejših izračunih ne bi prišlo do zmede, raje uporabljamo zapis $R(0,t)$, ki natančneje opredeli, na katero časovno obdobje se nanašajo izračuni. Prav tako pa za voljo boljše preglednosti lahko navadno obrestno mero označimo z $L(0,t)$, moč obresti pa z $Y(0,t)$.

Primer 1. *Recimo, da imamo* 100 *€. Zanima nas, koliko bo vrednih čez* 1 *leto, če jih vložimo z obrestno mero* 5%*. Ker nas zanima cena v prihodnosti, to lahko izračunamo s pomočjo* ***obrestovalnega faktorja****.*
Oglejmo si podatke:
$N_0 = 100$ €
$t = 1$
$R = 5\% \rightarrow 0,05$
$N_1 = ?$
Za izračun uporabimo naslednji formuli:
Osnovna formula:

$$N_1 = N_0 \cdot A(0,t).$$

Formula za izračun obrestovalnega faktorja:

$$A(0,t) = 1 + R \cdot t.$$

Vnesemo podatke in izračunamo:

$$A(0,1) = 1 + 0,05 \cdot 1$$
$$A(0,1) = 1,05.$$

**Ker gledamo razdaljo od začetka meritve do konca prvega leta, v obrestovalni faktor* $A(0,t)$ *vstavimo* 0*, kar predstavlja začetni čas, in* 1*, kar predstavlja konec prvega leta.*

$$N_1 = 100\,€ \cdot 1,05$$
$$N_1 = 105\,€$$

Torej bo naših vloženih 100 *€, zaradi* 5% *obrestne mere, čez eno leto vrednih* 105 *€.*

Primer 2. *Zdaj poskusimo narediti obratno. Vemo, da bo naš denar čez eno leto vreden* 105 *€ pri obrestni meri* 5%*. Zanima nas, koliko je vreden zdaj. Ta račun lahko opravimo s pomočjo* ***diskontnega faktorja****.*

Oglejmo si podatke:
$N_1 = 105$ €
$t = 1$
$R = 5\% \rightarrow 0,05$
$N_0 = ?$
Za izračun uporabimo naslednji formuli:
Osnovna formula:

$$N_0 = N_1 \cdot D(0,t).$$

Formula za izračun diskontnega faktorja:

$$D(0,t) = \frac{1}{1 + R \cdot t}.$$

Vnesemo podatke in izračunamo:

$$D(0,1) = \frac{1}{1 + 0,05 \cdot 1}$$

$$D(0,1) = \frac{1}{1,05}$$

$$D(0,1) = 0,952.$$

**Tukaj je situacija ista kot pri obrestovalnem faktorju, v $D(0,t)$ vstavimo 0 in 1 kot začetek meritve in konec prvega leta.*

$$N_0 = 105\,€ \cdot 0,952$$

$$N_0 = 100\,€$$

Iz tega izvemo, da je 105 € v prihodnosti zdaj vredno 100 €. V tem primeru je obrestna mera 5% delovala obratno kot v prejšnem primeru. Ker smo dobili enak rezultat kot v 1. primeru, smo lahko prepričani, da smo računali pravilno, saj sta obrestna in diskotna mera ***obratno sorazmerni.****.*

Primer 3. *V prejšnih primerih smo si ogledali navadno obrestovanje, zdaj pa se bomo poglobili v obrestno obrestovanje. V tem primeru nas zanima končna vrednost z obrestmi, ki pa se pripisujejo večkrat pred končnim časom in se vrednost obresti tudi obrestuje po dani obrestni meri. Imamo 100 €. Zanima nas, koliko bodo vredni čez 6 mesecev, če jih vložimo z nominalno obrestno mero 5% za čas enega leta. Ker nas zanima cena v prihodnosti, vendar imamo le letno vrednost, moramo vrednost denarja po šestih mesecih*

izračunati z ***obrestovalnim faktorjem****.*
Oglejmo si podatke:
$N_0 = 100$ €
$t = 1$
$k = 12$ *(skupno število mesecev v letu)*
$h = 6$
$R = 5\% \rightarrow 0,05$
$N_{\frac{1}{2}} = ?$
Za izračun uporabimo naslednji formuli:
Osnovna formula:

$$N_1 = N_0 \cdot A(0,t).$$

Formula za izračun obrestnega faktorja:

$$A\left(0, \frac{h}{k}\right) = A\left(0, t_1\right) = \left(1 + \frac{R}{k}\right)^h.$$

Vnesemo podatke in izračunamo:

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^6$$

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right) = (1 + 0,00417)^6$$

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right) = 1,0253.$$

*Ker gledamo čas le po polovici leta, v obrestovalni faktor vpišemo $\frac{1}{2}$. V tem primeru gledamo stanje na polovici polnega časa, zato najprej delimo letno obrestno mero s skupnim številom mesecev, da dobimo mesečno obrestno mero, in jo potem potenciramo s potrebovano količino mesecev (v našem primeru 6).

$$N_{\frac{1}{2}} = 100€ \cdot 1,0253$$

$$N_{\frac{1}{2}} = 102,53€$$

Torej bo naših vloženih 100 €*, zaradi* 5% *obrestne mere, čez pol leta vrednih* 102,53 €*.*

Primer 4. *Tukaj je zelo podoben primer, le z malo drugačnimi podatki. Vemo, da bo vloženi denar čez eno leto vreden* 105 €*. Zanima nas, koliko bo vreden čez* 6 *mesecev, če jih vložimo z nominalno obrestno mero* 5% *v roku*

enega leta. Ker nas zanima cena v posebnem trenutku, vendar imamo le ceno v prihodnosti, uporabimo diskontni faktor.
Oglejmo si podatke:
$N_1 = 105$ €
$t = 1$
$k = 12$ *(skupno število vseh mesecev)*
$h = 6$
$R = 5\% \rightarrow 0,05$
$N_{\frac{1}{2}} = ?$
Za izračun uporabimo naslednji formuli:
Osnovna formula:

$$N_0 = N_1 \cdot D(0, t).$$

Formula za izračun diskontnega faktorja:

$$D(0, \frac{h}{k}) = D(0, t_1) = (1 + \frac{R}{k})^{-h}.$$

Vnesemo podatke in izračunamo:

$$D\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{-6}$$

$$D\left(0, \frac{1}{2}\right) = (1 + 0,00417)^{-6}$$

$$D\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0,975.$$

*Ker gledamo čas le po polovici leta, v obrestovalni faktor vpišemo $\frac{1}{2}$. V tem primeru gledamo stanje na polovici polnega časa, zato najprej delimo letno obrestno mero z skupnim številom mesecev, da dobimo mesečno obrestno mero in potem potenciramo z **negativno** potrebovano količino mesecev (v našem primeru 6).

$$N_{\frac{1}{2}} = 105€ \cdot 0,975$$

$$N_{\frac{1}{2}} = 102,41€$$

Torej bo naših vloženih 105 €*čez eno leto, zaradi* 5% *obrestne mere, čez pol leta vrednih* 102,41 €*. Zaradi mesečnih pripisanih obresti se ta rezultat razlikuje od tistega iz 3. primera.*

Primer 5. *Zdaj si bomo ogledali primer z* ***zveznim obrestovanjem****. Za razliko od diskretnega obrestovanja, kjer se obresti prišteva le ob določenem času, se pri zveznem prištevajo vsak trenutek, zaradi tega je veliko bolj točno. Vzamemo nam že poznane podatke in izračunamo, koliko bo vrednih vloženih 100 € čez 1 leto, če je obrestna mera* 5%.
Oglejmo si podatke:
$N_0 = 100$ €
$t = 1$
$R = 5\% \rightarrow 0,05$
$N_1 = ?$
Za izračun uporabimo naslednji formuli:
Osnovna formula:

$$N_1 = N_0 \cdot A(0,t).$$

Formula za izračun obrestnega faktorja:

$$A(0,t) = e^{R \cdot t}.$$

Vnesemo podatke in izračunamo:

$$A(0,1) = e^{0,05 \cdot 1}$$

$$A(0,1) = 1,051.$$

V formuli in pri računu opazimo znak "e", to je* ***Eulerjeva konstanta* *in meri prebližno 2,718. V tem primeru jo uporabimo za izračun obrestnega faktorja pri zveznem obrestovanju.*

$$N_1 = 100€ \cdot 1,051$$

$$N_1 = 105,127€$$

Torej bo naših vloženih 100 €*, zaradi* 5% *obrestne mere, v roku enega leta z zveznim obrestovanjem vrednih* 105, 127 €*. Tukaj je razlika že večja,* 0, 127 €*, vendar bi bilo pri večjih številkah veliko več denarja izgubljenega.*

Primer 6. *Ogledali si bomo še en podoben primer z* ***zveznim obrestovanjem****, vendar nas bo tokrat zanimala današnja vrednost vloženega denarja, če vemo, da bo pri obrestni meri* 5% *čez 1 leto njegova vrednost* 105 €*, . V tem primeru bomo spet uporabili diskontni faktor.*

Oglejmo si podatke:
$N_1 = 105$ €
$t = 1$
$R = 5\% \rightarrow 0,05$
$N_0 = ?$
Za izračun uporabimo naslednji formuli:
Osnovna formula:

$$N_1 = N_0 \cdot D(0,t).$$

Formula za izračun obrestnega faktorja:

$$D(0,t) = e^{-R \cdot t}.$$

Vnesemo podatke in izračunamo:

$$D(0,1) = e^{-0,05 \cdot 1}$$

$$D(0,1) = 0,951$$

**Ker je diskontni faktor obratno sorazmeren z obrestovalnim faktorjem, uporabimo negativno potenco.*

$$N_0 = 105\,€ \cdot 0,951$$

$$N_0 = 99.879\,€$$

Torej je naš vložen denar, ki bo čez eno leto vreden 105 €*, zaradi* 5% *zvezne obrestne mere zdaj vreden* 99,879 €*. Lahko opazimo, da je razlika med rezultati* 1. *in* 5. *primera približno ista kot med* 2. *in* 6. *primerom, zato lahko vemo, da smo izračunali pravilno.*

3 Obveznice

3.1 Kaj sploh so obveznice

Obveznica je preprost vrednostni papir. Delimo jih na **kuponske** in **brezkuponske obveznice**. So netvegan oz. manj tvegan finančni instrument. Izdane so predvsem s strani državnih inštitucij, lahko pa tudi podjetij in drugih gospodarskih ustanov. Oceno o obveznicah podajajo bonitetne agencije. Te ocene povejo, kolikšna je verjetnost, da bodo te inštitucije zmožne odplačati obljubljene kupone in nominalno vrednost obveznice. Bonitetne ocene so od AAA, ki je najboljša in pomeni zelo verjetno plačilo, pa do D, ki je najslabša in pomeni zelo verjetno neplačilo.

3.2 Zakon ene cene in neobstoj arbitraže

Pri matematični obravnavi vrednostnih papirjev sta najpomembnejši dve predpostavki. Prvo imenujemo **zakon ene cene** , drugo pa predpostavka o **neobstoju arbitražne priložnosti** oz. da na trgu ni arbitraže. Zakon ene cene pravi, da imata dve naložbi oz. investiciji enako začetno vrednost, če so vsi denarni tokovi v prihodnosti enaki za obe naložbi. V praksi to pomeni, da se ne sme zgoditi arbitražna priložnost. Arbitražna priložnost pa je naložba, ki ima začetno vrednost 0, v prihodnosti pa ima samo nenegativne denarne tokove in vsaj v enem trenutku pozitiven denarni tok. To bi pomenilo, da bi imeli profit oz. zastonj kosilo. Predpostavka, da tega ni, je torej, da ni zastonj kosila.

3.3 Brezkuponske obveznice

Pri brezkuponskih obveznicah investitor plača ceno oz. začetno vrednost P ob času $t = 0$ in prejeme ob času dospetja T nominalno vrednost N. Obveznica se prodaja z **diskontom** $D(0,T) = \frac{P}{N}$. Poznamo kratkoročne brezkuponske obveznice, dolgoročne brezkuponske obveznice in večne brezkuponske obveznice. Denarne tokove lahko prikažemo z grafičnim prikazom 1.

Slika 1: Grafični prikaz denarnih tokov brezkuponskih obveznic.

Nominalna obrestna mera se izračuna po formuli

$$R(0,T) = \frac{1}{D(0,T)^T}.$$

$R(0,T)$ je tudi efektivna obrestna mera oziroma letni donos obveznice. Velja

$$P = \frac{N}{(1 + R(0,T))^T}.$$

Lahko povemo še definicijo **donosnosti do dospetja**, ki je

$$y(0,T) = -\frac{lnD(0,T)}{T}.$$

Velja še

$$P = Ne^{-yT}.$$

Primer 7. *Obveznice so nekako podobne obrestovanju, vendar se računajo na popolnoma drugačen način. Ogledali si bomo en primer z* ***brez kuponskim obrestovanjem****. To pomeni, da kupimo obveznico za neko ceno in jo potem čez nekaj časa prodamo. Recimo, da si kupimo obveznico z nominalno vrednostjo* 100 € *in nas zanima, koliko je njena cena, če je obrestna mera* 5% *in jo nameravamo prodati čez* 1 *leto.*
Oglejmo si podatke:
$N = 100$ € *(nominalna vrednost obveznice)*
$t = 1$
$R(0,T) = 5\% \rightarrow 0,05$ *(T je končni čas)*
$P = ?$ *(cena obveznice ob času* 0*)*
Za izračun uporabimo naslednjo formulo:

$$P = \frac{N}{(1 + R(0,T))^T}.$$

Vnesemo podatke in izračunamo:

$$P = \frac{100€}{(1 + 0,05)^1}$$

$$P = 95,24€.$$

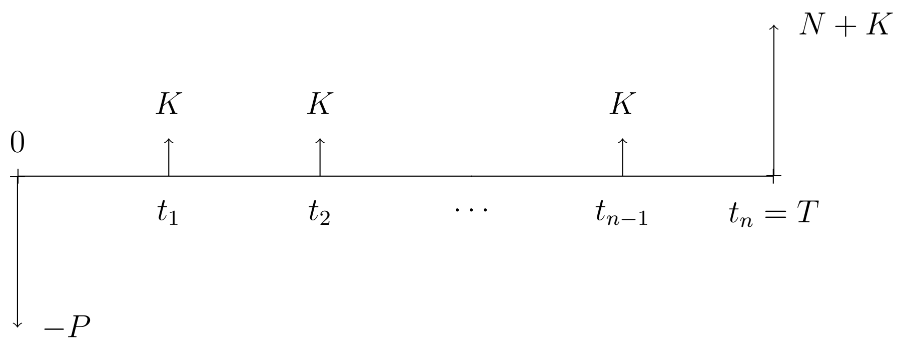
Torej, je zaradi obrestne mere 5

3.4 Kuponske obveznice

Brezkuponska in kuponska obveznica se razlikujeta v tem, da pri kuponski obveznici poleg izplačila nominalne vrednosti N ob dospetju T kupec dobi tudi kupone v času od 0 do t_n oz. T. Ponavadi so vsi kuponi enaki in izplačani na enakih časovnih intervalih npr. eno leto. Zapadlost obveznice je od nekaj mesecev do več let. Obveznica ima vrednost P, ki jo investitor plača ob času $t = 0$. Če je $N > P$, potem se prodaja z diskontom, ki je enak $N - P$, če je pa $P > N$, potem pa se prodaja s premijo, ki je enaka $P - N$. Razmerje med vrednostjo kuponov in nominalno vrednostjo imenujemo kuponska obrestna mera. Denarne tokove lahko prikažemo z grafičnim prikazom 2.

Vrednost kuponske obveznice lahko izračunamo s pomočjo formule

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i D(0, t_i) + N \cdot D(0, t_n).$$



Slika 2: Grafični prikaz denarnih tokov kuponskih obveznic.

3.5 Zakon ene cene

Že prej smo povedali, kaj naj bi bil zakon ene, sedaj ga bomo pa še razložili. Na kuponsko obveznico s kuponi $C_1, C_2, \ldots C_n$, ceno P in nominalno vrednostjo N lahko gledamo kot na naložbo n brezkuponskih obveznic z dospetji t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ z enakimi vrednostmi, kot jih imajo kuponi. Iz tega sledi, da je denarni tok ene kuponske obveznice enak denarnemu toku n brezkuponskih obveznic. Torej morata biti, zaradi zakona ene cene, obe investiciji enako vredni:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Predstavljajmo si dva različna primera. V prvem kupimo tri brezkuponske obveznice. Prva traja $T = 1$ leto, stane $P = 10€$ in naj bi jo prodali za $N = 12€$. Podobno naredimo tudi za drugo obveznico, le da ta traja $T = 2$

leti. Zadnja obveznica pa traja $T = 3$ leta, stane $P = 50€$ in je vredna $N = 62€$. Na drugi strani pa imamo kuponsko obveznico, ki traja $T = 3$ leta in stane $P = 80€$. Nominalna vrednost $N = 50€$ in vsi kuponi so vredni $K = 12€$ in jih investitor dobi vsako leto. Ker so finančni tokovi v obeh primerih enaki, bi morali biti tudi ceni enaki. To v tem primeru ni res, saj bi v prvem primeru plačali $P = 70€$ in dobili enako denarja kot v drugem primeru, ko bi plačali $P = 80€$. To pa krši zakon ene cene. Zato, da ga ne bi kršili, bi morali ceno druge obveznice spustiti na $P = 70$ €.

Primer 8. *Trenutne moči obresti za obdobje* $[0, t]$ *z zveznim obrestovanjem prikazuje spodnja preglednica.*

t	0.5	1	1.5	2
$Y(0,t)$	5.00%	5.80%	6.40%	6.80%

Kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 100 € *in dospetjem* 2 *leti izplačuje polletne kupone po* 6% *nominalni obrestni meri, prvega čez natanko 6 mesecev.*

Kolikšna je cena obveznice v času 0*?*

Izpišemo podatke:

$N = 100$ €
$T = 2$
$c = 6\%$
$k = 2$
$h = 4$

Uporabimo naslednje enačbe:

$$K = c \cdot N \cdot \frac{1}{k},$$

$$P = \sum_{i=1}^{h} K_i \cdot D\left(0, t_i\right) + N \cdot D\left(0, T\right),$$

$$D(0, t) = e^{-Y(0,t)t}.$$

Izračunamo:

- *vrednosti kuponov*

$$K = 6\% \cdot 100\,€ \cdot 0.5 = 3\,€$$

- *in ceno obveznice*

$$P = \sum_{i=1}^{4} K \cdot D\left(0, t_i\right) + N \cdot D\left(0, T\right)$$

$$P = 3(e^{-0{,}0500 \cdot 0.5} + e^{-0{,}0580 \cdot 1} + e^{-0{,}0640 \cdot 1.5} + e^{-0{,}0680 \cdot 2}) + 100 \cdot e^{-0{,}0680 \cdot 2}$$

$$P = 98.39\,€.$$

Primer 9. *Trenutne moči obresti za obdobje* $[0, t]$ *z zveznim obrestovanjem prikazuje spodnja preglednica.*

t	1	2	3	4	5
$Y(0,t)$	4.67%	5.27%	5.81%	6.31%	6.75%

Obstajata obveznici z nominalno vrednostjo 100 *EUR:*

- *obveznica* B_1 *z dospetjem* 5 *let in letnimi 6% kuponi,*
- *obveznica* B_2 *z dospetjem* 3 *leta in letnimi 10% kuponi.*

Izračunajte ceni P_1 *in* P_2 *obveznic* B_1 *in* B_2.

Izpišemo podatke:

$N_1 = 100\,€$	$N_2 = 100\,€$
$T_1 = 5$	$T_2 = 3$
$c_1 = 6\%$	$c_2 = 10\%$
$k_1 = 1$	$k_2 = 1$
$h_1 = 5$	$h_2 = 3$

Uporabimo naslednje enačbe:

$$K = c \cdot N \cdot \frac{1}{k},$$

$$P = \sum_{i=1}^{h} K_i \cdot D\left(0, t_i\right) + N \cdot D\left(0, T\right),$$

$$D(0, t) = e^{-Y(0,t)t}.$$

Izračunamo:

- *vrednosti kuponov*

$$K_1 = 6\% \cdot 100\,€ = 6\,€,$$
$$K_2 = 10\% \cdot 100\,€ = 10\,€$$

- *in ceni obveznic*

$$P_1 = \sum_{i=1}^{5} K_1 \cdot D\,(0, t_i) + N \cdot D\,(0, T)$$

$$P_1 = 6(e^{-0{,}0467 \cdot 1} + e^{-0{,}0527 \cdot 2} + e^{-0{,}0581 \cdot 3} + e^{-0{,}0631 \cdot 4} + e^{-0{,}0675 \cdot 5}) + 100 \cdot e^{-0{,}0675 \cdot 5}$$

$$P_1 = 96.46\,€,$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{3} K_2 \cdot D\,(0, t_i) + N \cdot D\,(0, T)$$

$$P_2 = 10(e^{-0{,}0467 \cdot 1} + e^{-0{,}0527 \cdot 2} + e^{-0{,}0581 \cdot 3}) + 100 \cdot e^{-0{,}0581 \cdot 3}$$

$$P_2 = 110.95\,€.$$

4 Zaključek

V času izdelovanja tega projekta smo se seznanili s tem, kako se vrednost denarja spreminja skozi čas. Vseeno pa žal finančna matematika ni točna, saj vedno napovedujemo dogajanje v prihodnosti, in nikoli ne moremo zagotovo vedeti, kaj se bo zgodilo, zato se tudi tukaj prepletata verjetnost in malo hazarda. Vendar lahko z novim znanjem lažje razumemo, manipuliramo in predvidevamo finančne tokove, inštrumente in dogovore. Ker se s tem vsi srečujemo v vsakdanjem življenju, je po našem mnenju znanje finančne matematike zelo pomembno.

Literatura

[1] Košir, T., Pugelj, K. & Toman, A., *Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike*, DMFA, Ljubljana, 2016.