Kvocientni topološki prostori

Juš Kocutar, Hugo Trebše, Gal Zajc
Mentorica: Katarina Šipec

Povzetek

V tem delu so predstavljeni homeomorfizmi in kvocientne preslikave med topološkimi prostori. Podanih je tudi več primerov.

1 Uvod

Pogosto nas na množicah zanimajo le določene lastnosti. V topologiji nas zanima le, katere točke so "blizu" drugim točkam in katere so od njih "oddaljene". Za začetek bomo ponovili osnove, nato se posvetimo preslikavam in homeomorfizmom, na koncu pa se ukvarjamo s kvocientnimi prostori, ki nam pomagajo pri konstrukciji novih topoloških prostorov iz že znanih. Pri kvocientnih preslikavah gre za združitev izbranih točk, ki so ena od druge "oddaljene".

2 Osnove

Pred uvedbo homeomorfizmov in kvocietnih preslikav se spomnimo še nekaj definicij:

- **preslikava** je sestavljena iz domene, kodomene in predpisa. Preslikava mora biti celovita in enolična, kar pomeni, da mora vsakemu elementu iz domene prirediti natanko en element iz kodomene,
- preslikava $f : X \to Y$ je **injektivna**, če za vsaka $x_1, x_2 \in X$ velja:
$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2,$$
- preslikava $f : X \to Y$ je **surjektivna**, če velja, da je zaloga vrednosti $Z_f = Y$,
- preslikava $f : X \to Y$ je **bijektivna**, če je obenem injektvna in surjektivna.

Topologija

Definicija 1. ***Praslika*** *točke $y \in Y$ je množica*
$$f^{-1}(y) = \{x \in X;\; f(x) = y\}.$$

Definicija 2. ***Topologija*** *τ na množici X je družina vseh podmnožic, za katero velja:*

- $\emptyset, X \in \tau$,
- *unija poljubne poddružine družine τ je v τ,*
- *presek končne poddružine τ je v τ.*

Topološki prostor *je par (X, τ).*

Zgled 1. Primeri topologij na množici $X = \{1, 2, 3\}$ so:

- $\tau_1 = \{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$,
- Trivialna topologija: $\tau_2 = \{\{\}, \{1, 2, 3\}\}$. Trivialna topologija je topologija, katere elementa sta le množica X in prazna množica.
- Diskretna topologija: $\tau_3 = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Diskretna topologija je topologija, ki vsebuje vse podmnožice množice X.

Zgled 2. Na $\mathbb{R}$ lahko definiramo tudi topologijo

$$\tau = \{\{\{\}, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a); a \in \mathbb{R}\}\}.$$

Preverimo, da je τ resnično topologija. Družina τ vsebuje $\{\}$ in $\mathbb{R}$. Ker je presek prazne množice s poljubno množico prazna množica in je presek poljubne množice z množico $\mathbb{R}$ začetna množica, to pomeni, da moramo pogledati le, da je presek poljubnih poltrakov v družini τ. Opazimo, da za poljubni realni števili a in b velja

$$(-\infty, a) \cap (-\infty, b) = (-\infty, \min(a, b)) \in \tau.$$

S podobnim premislekom kot za preseke ugotovimo, da je dovolj preveriti le poljubne unije poltrakov. Opazimo tudi, da je poljubna unija poltrakov tudi poltrak in je τ resnično toplogija.

Definicija 3. ***Baza topologije*** *na množici X je družina $\mathcal{B}$ podmnožic množice X, za katero velja:*

- $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = X$,
- *za vsako točko x v preseku dveh elementov $A, B \in \mathcal{B}$ obstaja $U \in \mathcal{B}$, da velja*
$$U \subseteq A \cap B \text{ in } x \in U.$$

Topologijo na množici X, ki jo porodi baza $\mathcal{B}$, definiramo kot družino vseh poljubnih unij in vseh končnih presekov elementov iz baze $\mathcal{B}$.

Na $\mathbb{R}^n$ definiramo **evklidsko** topologijo z bazo iz odprtih krogel

$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R};\ d(x, a) < r\}$$

za vse $a \in \mathbb{R}^n$ in $r \in \mathbb{R}$, kjer je d razdalja med točkama.

Pogosto bomo opazovali podmnožice topoloških prostorov. Na njih definiramo pododovano topologijo, ki jo podedujejo od prostorov, v katerih živijo.

Definicija 4. *Naj bo (X, τ_X) topološki prostor in $Y \subseteq X$.* ***Topologija τ_Y na podprostoru*** *Y je družina podmnožic A množice Y, za katere obstaja $B \in \tau_X$, da je $A = B \cap Y$.*

3 Preslikave in homeomorfizmi

V nadaljevanju bomo definirali zvezne preslikave med topološkimi prostori, kar nas bo vodilo do pojma homeomorfizma. Oba pojma sta pomembna, saj smo doslej spoznali, kaj topološki prostori so, ne vemo pa še, kakšne so preslikave med njimi oziroma kako lahko iz danih topoloških prostorov skonstruiramo nove. Slednje dejstvo je bistvenega pomena pri raziskovanju kvocientnih prostorov, kar je naš cilj, saj jih lahko najbolj učinkovito definiramo kot posledico neke preslikave. S pojmom homoemorfizma pa bomo lahko opredelili, kdaj sta dva topološka prostora "enaka" v topološkem smislu.

Definicija 5. *Naj bosta X in Y topološka prostora. Preslikavo $f : X \to Y$ imenujemo **zvezna**, če je za vsako odprto podmnožico $V \subseteq Y$ njena praslika $f^{-1}(V) \subseteq X$ odprta. Preslikava je $g : X \to Y$ **odprta**, če je za vsako odprto podmonožico $A \subseteq X$ njena slika $g(A) \subseteq Y$ odprta podmnožica.*

Preverimo lahko, da je definicija zveznosti v splošnih topološkh prostorih enaka znani definiciji zveznosti za funkcije realne spremenljivke, torej preslikave iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$, kjer je $\mathbb{R}$ opremljen z evklidsko topologijo. Prednost naše definicije je seveda, da je mnogo enostavnejša, bolj splošna in opisuje preslikave med poljubnimi topološkimi prostoromi.

Zvezna preslikava nam torej sporoči, da je vsaka odprta podmnožica v kodomeni slika neke odprte množice, pojem odprte pa, da se vsaka odprta množica v domeni slika v odprto množico. Skupaj torej ohranjata odprte množice, kar pa je v bistvu vse, kar določa topološko strukturo. Naravno bomo takšno preslikavo, ki popolnoma ohranja topološko strukturo, tudi poimenovali.

Definicija 6. *Preslikavi $f : X \to Y$, ki je bijektivna, zvezna in odprta pravimo **homeomorfizem**. Če med prostoroma X in Y obstaja homeomorfizem, sta **homeomorfna**.*

Podali bomo še naslednjo definicijo homeomorfizma, ki je ekvivalentna zgornji.

Definicija 7. *Homeomorfizem je preslikava $f : X \to Y$ za katero velja, da je zvezna bijekcija, katere inverzna preslikava je tudi zvezna.*

Definiciji sta resnično enaki; v obeh je jasno, da mora biti homeomorfizem bijektivna in zvezna preslikava. Preslikava f je odprta, če za vsako odprto množico $U \subseteq X$ velja, da je njena slika $f(U) \subseteq Y$ odprta množica v Y. Naj bo $g : Y \to X$ inverzna preslikava preslikave f. Vemo, da je g zvezna, kar pomeni, da za vsako odprto množico $U \subseteq X$ velja, da je njena praslika $g^{-1}(U) \subseteq Y$ odprta množica v Y. Vendar lahko zaradi bijektivnosti preslikave f neposredno sklepamo, da je $g^{-1}(U)$ enaka sliki U v preslikavi f, torej $g^{-1}(U) = f(U)$, kar pa je enako pogoju odprtosti.

Trditev 1. *Naj bodo X, Y in Z topološki prostori. Denimo, da sta X in Y homeomorfna ter Y in Z homeomofna. Potem sta X in Z homeomorfna.*

Dokaz. Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ homeomorfizma. Poglejmo si preslikavo $g \circ f : X \to Z$. Vemo, da je kompozitum bijekcij bijekcija. Naj bo $W \subseteq Z$ odprta množica, potem je $g^{-1}(W)$ odprta v Y, saj je g zvezna, in $f^{-1}(g^{-1}(W))$ odprta v X, saj je f zvezna, torej je $(g \circ f)^{-1}(W)$ odprta v X, kar pomeni, da je $g \circ f$ tudi zvezna preslikava. Naj bo $U \subseteq X$ odprta množica, potem je $f(U)$ odprta v Y, saj je f odprta in $g(f(U))$ odprta v Z saj je g odprta, končno smo torej izvedeli, da je $(g \circ f)(U)$ odprta v Z, iz česar sledi, da je $g \circ f$ odprta preslikava. Pokazali smo, da je $g \circ f$ homeomorfizem, torej sta X in Z homeomorfna. $\square$

Pokazali bomo tudi, da zveznosti in odprtosti ni potrebno preveriti na vsaki odprti množici kodomene in domene zaporedno, temveč zgolj na baznih elementih. To dejstvo nam olajša dokazovanje zveznosti in odprtosti preslikav.

Trditev 2. *Naj bosta X in Y topološka prostora in $\mathcal{B}_X$ ter $\mathcal{B}_Y$ bazi njunih topologij. Preslikava $f : X \to Y$ je zvezna, če je za vsak element $B \in \mathcal{B}_Y$ njegova praslika $f^{-1}(B) \subseteq X$ odprta. Preslikava $g : X \to Y$ je odprta, če je za vsak element $C \in \mathcal{B}_X$ njegova slika $g(C)$ odprta v Y.*

Dokaz. Vemo, da je poljubna odprta podmnožica $V \subseteq Y$ enaka uniji baznih elementov v $\mathcal{B}_Y$, torej $V = \bigcup_{i \in I} B_i$, kjer so B_i bazne množice. Praslika množice V je torej enaka

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

torej nam preostane samo še zadnja enakost. Recimo, da je $a \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$. Če se a slika v unijo množic, se slika vsaj v eno, iz česar neposredno sledi $a \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Torej velja $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Recimo, da je $b \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Sledi, da se b slika v vsaj eno množico iz unije, torej se slika v unijo, oziroma $b \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$, kar smo želeli dokazati. Dokaz za odprtost je analogen. $\square$

Zgled 3. Naj bosta $I = [0, 1]$ in $X = [a, b]$ intervala. Definirajmo preslikavo $f : I \to X$ s predpisom

$$f(t) = (b - a)t + a.$$

Intuitivno vemo, da je poljuben odprt interval $[a, b]$ zgolj skrčena/raztegnjena različica intervala $[0, 1]$, zato bi lahko dokazali, da je f homeomorfizem in da sta intervala resnično topološko enaka.

Oba intervala obravnavamo kot podprostora $\mathbb{R}$, torej je tudi njuna topologija definirana kot preseki odprtih množic $\mathbb{R}$ (unije odprtih intervalov) z intervaloma I in X. Intervala $[0, \frac{1}{4})$ in $(\frac{a+b}{2}, b]$ npr. sta tako zaporedoma odprti množici v I in X, kljub temu da nista odprti množici v $\mathbb{R}$.

Najprej moramo pokazati, da je preslikava f bijektivna. Recimo, da za $c, d \in I$ velja $f(c) = f(d)$, torej

$$(b-a)c + a = (b-a)d + a \quad \Rightarrow \quad c = d,$$

saj je $b - a \neq 0$. Preslikava f je torej injektivna. Velja tudi, da je preslikava surjektivna, saj je vsak element $h \in X$ slika števila $\frac{h-a}{b-a} \in [0, 1]$.

Sledi dokaz zveznosti preslikave f. Kot vemo, nam zveznosti ni potrebno preveriti na vsaki odprti množici prostora X, ampak samo na baznih elementih, kar so intervali oblike $[a, c)$, $(d, b]$ in (i, j), vendar lahko prva dva zaradi simetrije obravnavamo kot en primer. Ker vemo, da je inverzna preslikava $g : X \to I$ definirana s predpisom

$$g(x) = \frac{x-a}{b-a},$$

je torej praslika intervala $f^{-1}([a, e)) = [0, \frac{e-a}{b-a})$, kar je odprta množica v I. Podobno je inverzna slika $f^{-1}((i, j)) = \left(\frac{i-a}{b-a}, \frac{j-a}{b-a}\right)$, kar je odprta množica v I, preslikava f je zato zvezna.

Tudi odprtost moramo preveriti zgolj na elementih baze množice I, kar so zaradi simetrije samo intervali oblike $[0, k)$ in (l, m) za $0 < k < 1$ in $0 < l < m < 1$. Slika intervalov prve oblike je $f([0, k)) = [a, (b-a)k + a)$, slika intervalov druge oblike pa $f((l, m)) = ((b-a)l + a, (b-a)m + a)$, očitno sta obe vrsti slik odprti množici v X.

Dokazali smo torej, da je preslikava f bijektivna, zvezna in odprta, iz česar sledi, da je f homeomorfizem in da je interval $[0, 1]$ homeomorfen poljubnemu intervalu oblike $[a, b]$.

Zgled 4. Naj bo $J = (0, 1)$ interval. Pokazali bomo, da je interval J homeomorfen celotni realni osi $\mathbb{R}$. Obe množici sta opremljeni z evklidsko topologijo, kar pomeni, da so odprte množice v J preseki odprtih množic v $\mathbb{R}$ z intervalom $(0, 1)$. Najprej bomo privzeli, da je $(0, 1)$ homeomorfen vsakemu drugem intervalu oblike (a, b), kjer $a, b \in \mathbb{R}$, homeomorfizem je podan z analogno preslikavo kot v zgledu 3. Vemo torej, da je množica J homeomorfna intervalu $(-1, 1)$.

Definirajmo preslikavo $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}.$$

Preverili bomo, da je f bijektivna, torej najprej injektivnost in potem surjektivnost. Preslikavo f lahko odvajamo kot funkcijo realne sprejemljivke in ugotovimo, da velja $f'(x) = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}$, iz česar sledi, da je f na intervalu $(-1,1)$ strogo padajoča, torej injektivna. Zlahka ugotovimo, da je f tudi surjektivna, saj je vsak $t \in \mathbb{R}$ slika števila $r = \frac{1-\sqrt{1+4t^2}}{2t}$, kjer je $-1 < r < 1$.

Ponovno moramo zveznost preveriti zgolj na baznih elementih prostora $\mathbb{R}$, torej odprtih intervalih oblike (a,b). Preverimo lahko, da je praslika odprtega intervala enaka

$$f^{-1}((a,b)) = \left(\frac{1-\sqrt{1+4b^2}}{2b}, \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a} \right),$$

kar je odprta množica v prostoru $(-1,1)$, saj sta obe krajišči intervala med -1 in 1.

Zaključimo tako, da preverimo, da je f odprta na baznih elementih prostora $(-1,1)$, kar so intervali oblike (c,d) za $-1 \leq c < d \leq 1$. Ločimo primere.

- $c = -1$. Če je $d = 1$, je $f((c,d)) = f(-1,1) = \mathbb{R}$. Če je $d \neq 1$, je $f((c,d)) = f((-1,d)) = (\frac{d}{(d-1)(d+1)}, \infty)$. V obeh primerih dobimo odprto množico.
- $d = 1$. Analogno prejšnjemu primeru.
- $c \neq -1$ in $d \neq 1$. V tem primeru velja $f((c,d)) = \left(\frac{d}{(d-1)(d+1)}, \frac{c}{(c-1)(c+1)}\right)$, kar je odprta množica v $\mathbb{R}$.

Ugotovili smo, da je f bijektivna, zvezna in odprta preslikava, torej homeomorfizem med $(-1,1)$ in $\mathbb{R}$. Velja torej, da je vsak odprt interval na realni osi homeomorfen poljubnemu drugemu odprtemu intervalu, tudi če je ta neomejen.

Zgled 5. Naj bo S^1 enotska krožnica v $\mathbb{R}^2$ in množica $X = [0,1)$ interval. Množica X je opremljena z evklidsko topologijo, krožnica S^1 pa s podedovano topologijo, v kateri so odprte vse množice oblike $U \cap S^1$, kjer je U odprta množica v $\mathbb{R}^2$ (intuitivno so to 'odprti intervali na krožnici'). Naravno lahko definiramo preslikavo $f : X \to S^1$ s predpisom

$$f(t) = (\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t)).$$

Predstavljamo si lahko, da preslikava 'ovije' polodprti interval $[0, 1)$ okoli krožnice.

Sprva bomo preverili, da je preslikava f bijektivna. Recimo, da velja $f(a) = f(b)$ za poljubna $a, b \in X$, sledi torej

$$(\cos(2\pi a),\ \sin(2\pi a)) = (\cos(2\pi b),\ \sin(2\pi b)) \iff$$

$$\cos(2\pi a) = \cos(2\pi b) \text{ in } \sin(2\pi a) = \sin(2\pi b),$$

iz česar sledi, da je $a - b \in \mathbb{Z}$, saj imajo kotne funkcije periodo 2π. Tako lahko neposredno sklepamo, da je a enako b, saj v nasprotnem primeru velja, da se a in b razlikujeta vsaj za 1, kar je nemogoče, saj je naš interval krajši od 1. Preslikava f je tudi očitno surjektivna.

Sedaj bomo preverili, da je preslikava f zvezna. Vemo, da odprtosti praslik ni potrebno preveriti na vseh odprtih množicah, temveč zgolj na elementih baze, ki so 'odprti intervali' na krožnici. Naj

$$((\cos(2\pi a),\ \sin(2\pi a)), (\cos(2\pi b),\ \sin(2\pi b)))$$

označuje odprti interval na krožnici, kjer je $a < b$. Opazimo, da je praslika ravno odprti inverval (a, b). Torej je res vsaka praslika odprte množice v S^1 odprta množica v X.

Preostane nam še ugotoviti, ali je preslikava f odprta. Poglejmo si sliko intervala $f([0, \frac{1}{2}))$ – odprte podmnožice prostora X. To je 'zaviti interval na krožnici' oblike $[(1, 0), (-1, 0))$, kar pa ni odprta množica v S^1, saj ne obstaja okolica točke $(1, 0)$, ki bi bila v celoti podmnožica intervala $[(1, 0), (-1, 0))$.

Preslikava f je torej primer zvezne in bijektivne preslikave med topološkima prostoroma, ki pa ni homeomorfizem, saj ni odprta. Prostor S^1 in polodprti interval X tudi resnično nista homeomorfna, torej homeomorfizem med njima ne obstaja, kljub temu da tega nismo dokazali. Kar smo pokazali, je zgolj, da preslikava f ni homeomorfizem.

Zgled 6. Dokažemo lahko, da intervala $X = (0, 1)$ in $I = [0, 1]$ nista homeomorfna. Predpostavimo, da obstaja zvezna, odprta bijekcija $f : X \to I$, torej obstaja točka $a \in X$ za katero velja $f(a) = 1$. Izberimo si takšen $h \in \mathbb{R}$, da je $(a - h, a + h)$ odprta množica v $(0, 1)$. Potem funkcija f doseže lokalni maksimum na odprtem intervalu $(a - h, a + h)$, kar pomeni, da f tu ni injektivna, to pa je protislovje in takšen homemorfizem ne obstaja.

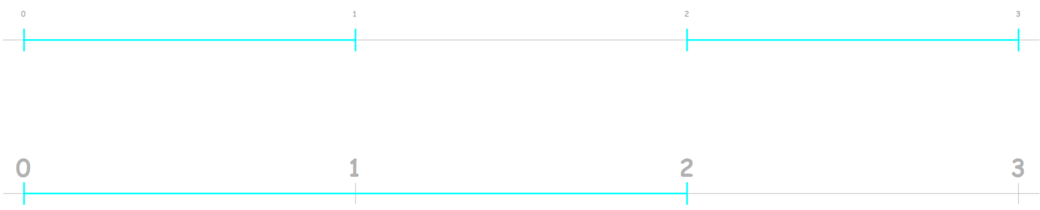
4 Kvocientne preslikave

Iz že znanih lahko dobimo nove topološke prostore z identifikacijo izbranih točk.

Definicija 8. *Preslikava $f : X \to Y$ je* ***kvocientna****, če je:*

- *zvezna,*
- *surjektivna,*
- *za vsako $V \subseteq Y$ velja: $f^{-1}(V)$ je odprta $\Rightarrow$ V je odprta.*

Zgled 7. Naj bo $f : [0,1] \cup [2,3] \to [0,2]$ preslikava, ki zlepi intervala $[0,1]$ in $[2,3]$ tako, da identificira točki 1 in 2.



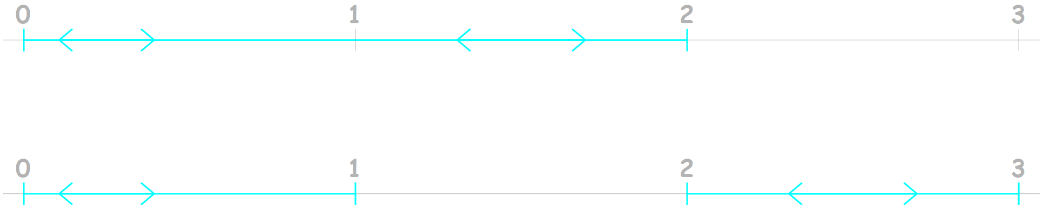
Slika 1: Lepljenje intervalov.

Predpis za preslikavo f lahko zapišemo tako:

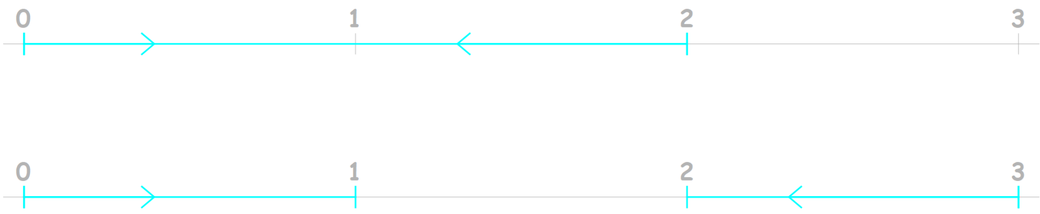
$$f : x \mapsto \begin{cases} x; & x \in [0,1] \\ x-1; & x \in [2,3] \end{cases}.$$

Preverimo, da je f kvocientna. Za odprte množice na intervalu $[0,2]$ imamo 3 bistveno različne možnosti:

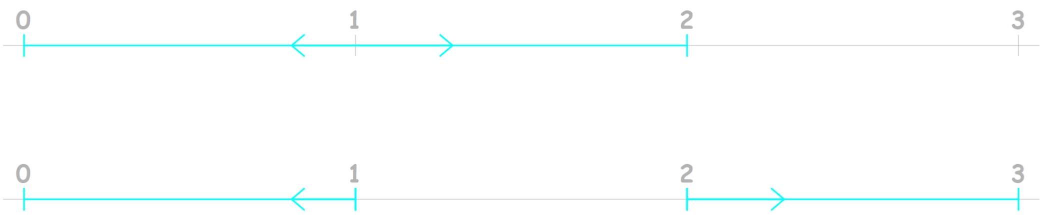
- $(a,b)\,; a,b \in [0,1] \vee a,b \in [1,2]$,
- $[0,b)\,; b \in (0,1] \;\vee\; (a,2]\,; a \in [1,2)\,$,
- $(a,b)\,; a \in [0,1) \wedge b \in (1,2]\,$.



Slika 2: Prva možnost odprtih množic na intervalu.



Slika 3: Druga možnost odprtih množic na intervalu.



Slika 4: Tretja možnost odprtih množic na intervalu.

Zveznost je razvidna s sličic, saj je praslika pri vsaki od naštetih možnosti odprta množica. Na enak način se lahko prepričamo tudi, da velja odprtost. Surjektivnost velja, saj lahko vsaki točki y z intervala $[0, 2]$ določimo neprazno prasliko:

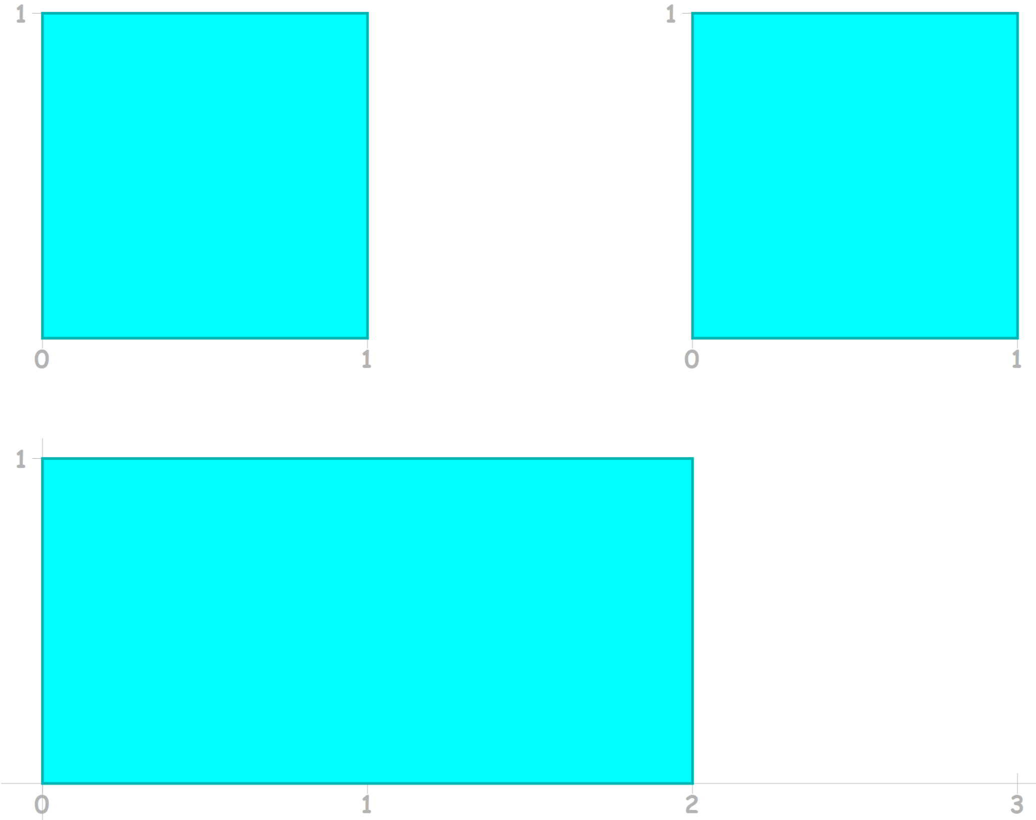
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{y\}\,; & y \in [0,1) \\ \{1,2\}\,; & y = 1 \\ \{y+1\}\,; & y \in (1,2] \end{cases}.$$

Zato vemo, da je ta preslikava res kvocientna.

Zgled 8. Naj bo

$$X = \{(x, y, i)\,;\ (x, y) \in [0,1] \times [0,1] \text{ in } i \in \{0,1\}\}$$

unija dveh zaprtih enotskih kvadratov in $f : X \to [0, 2] \times [0, 1]$ preslikava, ki ju zlepi v pravokotnik (kot je razvidno s slike 5).

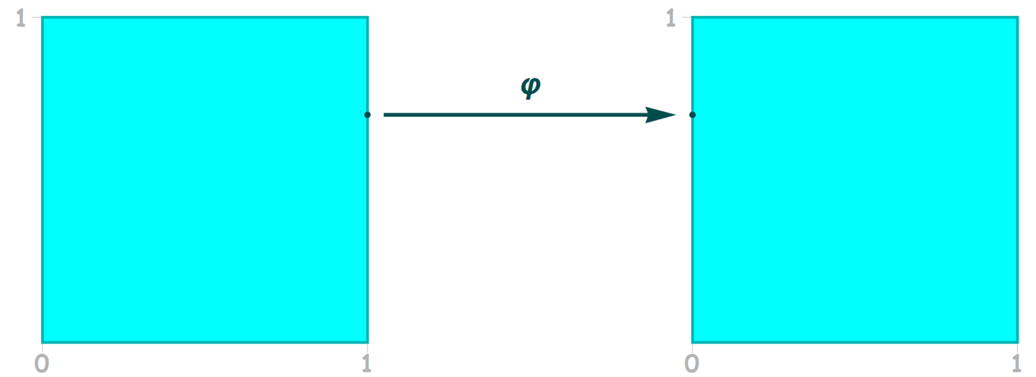


Slika 5: Stik dveh kvadratov vzdolž skupne stranice.

Označeni točki na robovih lahko med seboj povežemo s preslikavo

$$\varphi : \{(1, y, 0); y \in [0, 1]\} \to \{(0, y, 1); y \in [0, 1]\}$$

in identificiramo vsako točko iz prvega kvadrata z njeno sliko.

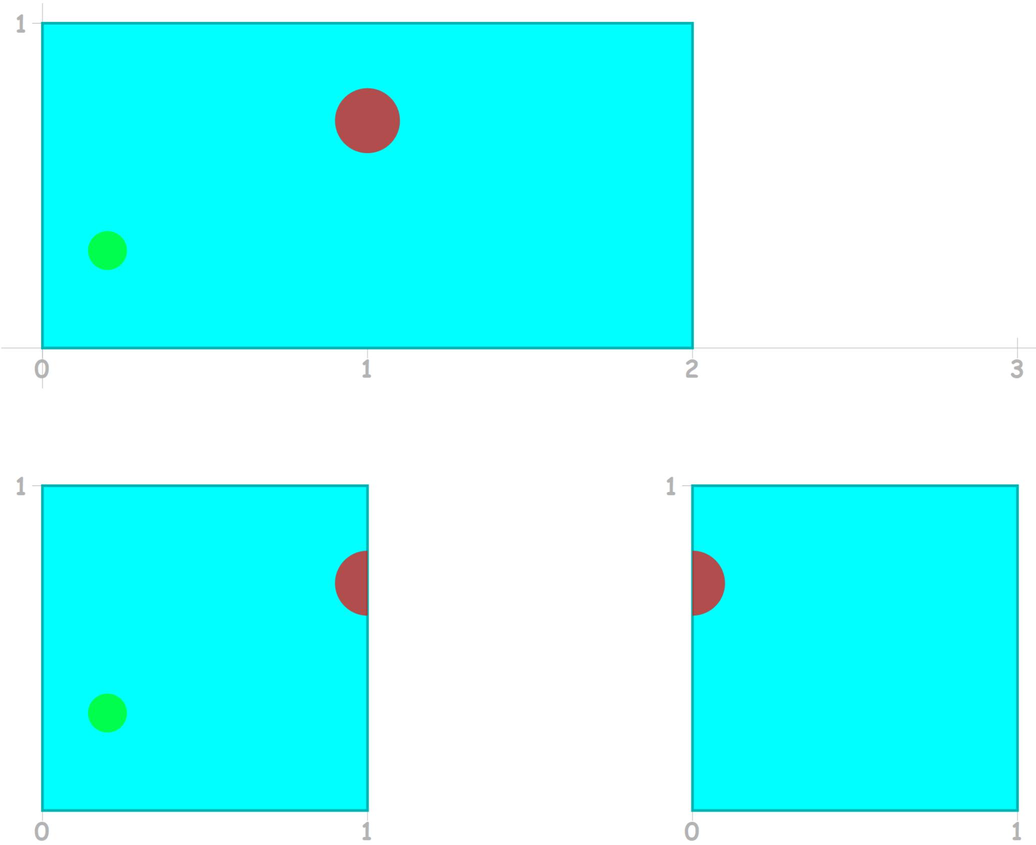


Slika 6: Identifikacija točk na robovih kvadratov.

Preslikava f ima predpis

$$f:(x,y,i)\mapsto(x+i,y)\,.$$

Enako kot v prejšnjem zgledu se lahko prepričamo, da velja zveznost, saj je praslika vsake odprte množice v pravokotniku $[0,2]\times[0,1]$ odprta množica.



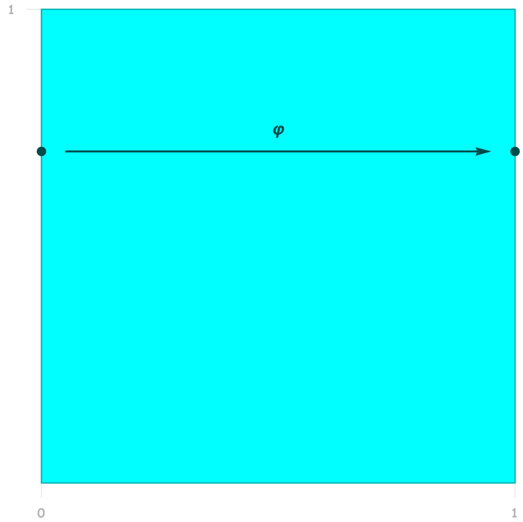
Slika 7: Odprte množice na $[0,2]\times[0,1]$ in praslika na X.

Na enak način se lahko prepričamo tudi, da velja odprtost. Surjektivnost velja, saj lahko vsaki točki (x,y) iz pravokotnika $[0,2]\times[0,1]$ določimo neprazno prasliko:

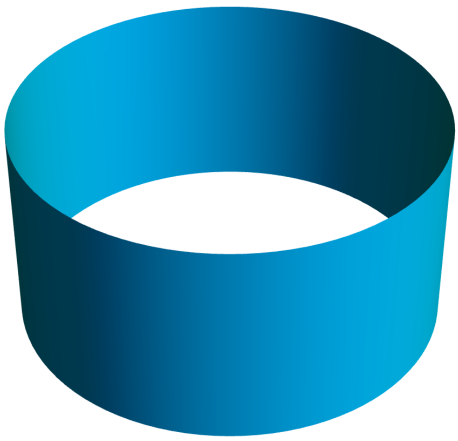
$$f^{-1}(x,y)=\begin{cases}\{(x,y,0)\}\,; & x\in[0,1)\\ \{(1,y,0)\,,(0,y,1)\}\,; & x=1\\ \{(x-1,y,1)\}\,; & x\in(1,2]\end{cases}\,.$$

Zato vemo, da je ta preslikava res kvocientna

Zgled 9. Naj bo $f : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ preslikava, ki zlepi en par nasprotnih robov enotskega kvadrata. Identifikacije lahko podobno kot v primeru 8 zapišemo s pomočjo preslikave $\varphi : \{0\} \times [0,1] \to \{1\} \times [0,1]$, ki vsaki točki na levi stranici kvadrata priredi točko na desni stranici kvadrata na isti višini.



Slika 8: Identifikacija točk na robovih kvadrata.



Slika 9: Plašč valja – prostor $S^1 \times [0,1]$.

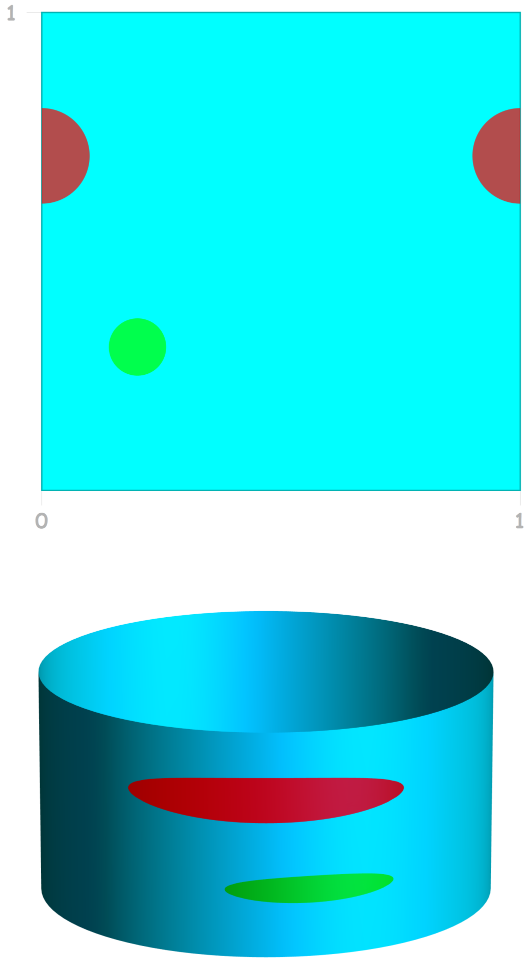
Označeni točki na robovih lahko med seboj povežemo s preslikavo

$$\varphi : \{(1, y); y \in [0, 1]\} \to \{(0, y); y \in [0, 1]\} .$$

Preslikava f ima predpis:

$$f : (x, y) \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) .$$

Enako kot v prejšnjem zgledu se lahko prepričamo, da velja zveznost, saj je praslika vsake odprte množice na enotskem valju odprta množica. To je razvidno s slike 10. Na enak način se lahko prepričamo tudi, da velja odprtost. Surjektivnost velja, saj lahko vsaki točki (x, y, z) iz enotskega valja določimo neprazno prasliko. Če je koordinata točke na valju oblike $(1, 0, z)$, sta to točki $(0, z)$ in $(1, z)$, sicer pa je to ena točka.



Slika 10: Odprte množice na zaprtem enotskem kvadratu in na plašču valja (unije krogel v $\mathbb{R}^3$, presekane z valjem).

Zato vemo, da je ta preslikava res kvocientna.

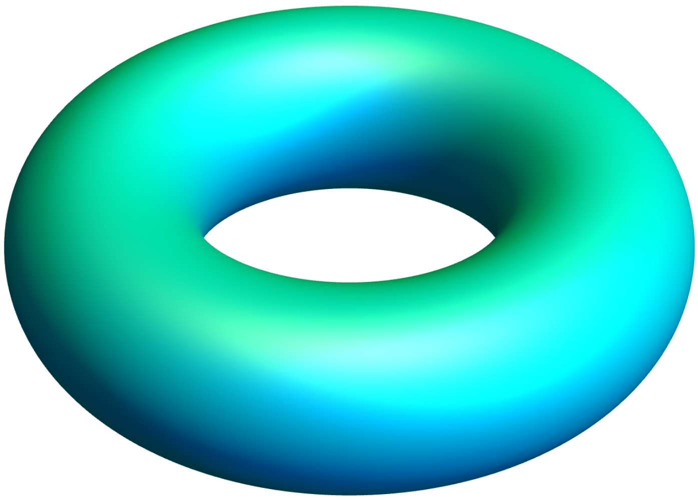
Zgled 10. Naj bo množica $K = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ enotski kvadrat. Na K lahko definiramo ekvivalenčno relacijo na sledeči način:

$$(0, t) \sim (1, t) \text{ in } (t, 0) \sim (t, 1)$$

za vse $t \in [0, 1]$, torej določimo, da sta po dve točki na nasprotnih robovih kvadrata v relaciji.

Naj bo množica $T = S^1 \times S^1$ torus, ki ga lahko parametriziramo kot podmnožico $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (ki je homeomorfen sicer $\mathbb{R}^4$). Lahko definiramo preslikavo $f : K \to T$ s predpisom

$$f((a, b)) = ((\cos 2\pi a, \sin 2\pi a), (\cos 2\pi b, \sin 2\pi b)).$$



Slika 11: Torus $T = S^1 \times S^1$.

Pokazali bomo, da je f kvocientna preslikava. Očitno je f surjektivna, saj imajo kotne funkcije periodo 2π, torej f slika K v celoten T.

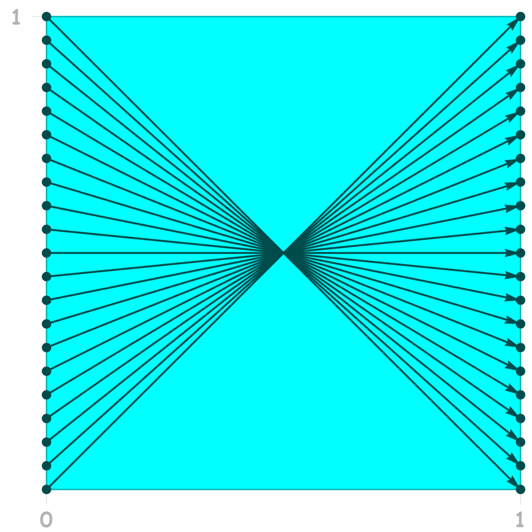
Poglejmo si praslike preslikave f. Recimo, da za neka $c, d \in [0, 1]$ velja $(\cos 2\pi c, \sin 2\pi c) = (\cos 2\pi d, \sin 2\pi d)$. Iz tega sledi, da sta dve točki na krožnici S^1 enaki, kar je mogoče le, če je $c - d \in \mathbb{Z}$, oziroma v našem primeru za različna c in d samo, če je $c = 1$ in $d = 0$ ali obratno. Iz tega sledi, da je praslike $f^{-1}(((1, 0), (\cos 2\pi d, \sin 2\pi d))) = \{(0, d), (1, d)\}$ in simetrično za drugo koordinato, torej nam natanko poda prej definirano ekvivalenčno relacijo. Torej je f preslikava, ki "zlepi" natanko točke iz istega ekvivalenčnega razreda v eno.

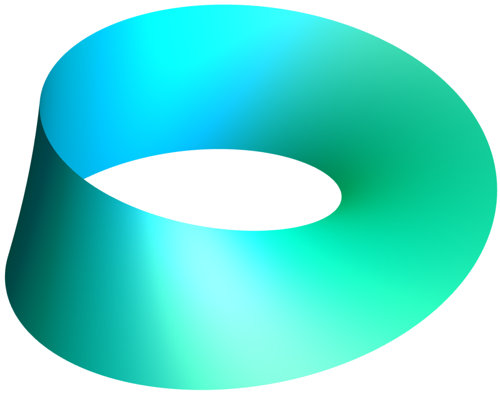
Hitro se da preveriti, da je f tudi zvezna. Podobno kot v zgledu 9 velja tudi tretji pogoj iz definicije 8, zato je preslikava f kvocientna.

Zgled 11. Ponovno je $K = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ enotski kvadrat. Na K lahko definiramo ekvivalenčno relacijo na sledeči način:

$$(0,t) \sim (1, 1-t)$$

za vse $t \in [0,1]$. V relaciji sta torej točka na robu na y osi in točka, prezrcaljena čez središče kvadrata. Tako zlepimo nasprotna robova, vendar obratno usmerjena, in dobimo je Möbiusov trak.





Slika 12: Mobiusov trak.

Zaključek

Spoznali smo se s homeomorfnimi ter kvocientnimi prostori. Definirali smo preslikave med topološkimi prostori in homeomorfizme. Podali smo več primerov homeomorfnih in nehomeomorfnih prostorov. Definirali smo kvocientne preslikave ter podali mnogo zgledov, med katere spadata valj in Möbiusov trak.

Zahvala

Zahvaljujemo se velecenjenim organizatorjem MaRS za to enkratno priložnost.

Literatura

[1] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, 2. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2017.

[2] zapiski s predavanj izr. prof. dr. Saša Strleta pri predmetu Uvod v geometrijsko topologijo, 2019