Metoda rodovnih funkcij

Neca Camlek, Luka Peruš, Ella Potisek
Mentor: Nejc Zajc

Povzetek

V projektu smo želeli spoznati, kako iz rekurzivnega zapisa priti do eksplicitnega. Seznanili smo se z zaporedji na splošno, rodovnimi funkcijami ter binomskim simbolom. Za primer smo vzeli rekurzivni zapis za Catalanova števila in ga spremenili v eksplicitnega s pomočjo rodovnih funkcij.

1 Uvod

V našem projektu smo se ukvarjali z zaporedji. V uvodnih primerih smo se seznanili z rekurzivnimi zvezami. Žal pa bi le-te porabile preveč časa, zato smo poizkusili najti hitrejše načine računanja členov zaporedja. Spoznali smo rodovne funkcije, metodo rodovnih funkcij ter binomski simbol, ki so nam pomagali priti do rešitve problema.

1.1 Uvodni zgledi

Za začetek smo rešili dve nalogi. Pri prvi smo se vprašali, na koliko načinov lahko številu nič prištejemo n enic ter odštejemo n enic, tako da nobena delna vsota ne bo negativna.

To število smo definirali kot c_n. Na začetku smo takoj opazili, da moramo zaporedje začeti s $+1$, pri nadaljevanju pa se nam je pokazalo že več možnosti. Zato smo nalogo premislili na manjših primerih, ko je n enak 1, 2 in 3. Pri $n = 1$ smo imeli le eno možnost:

$$+1 - 1.$$

Pri $n = 2$ smo imeli 2 možnosti, saj smo se lahko odločali le pri drugem členu. Ko je ta določen, nimamo več izbire, možnosti sta

$$+1 + 1 - 1 - 1, \qquad +1 - 1 + 1 - 1.$$

Pri $n = 3$ smo imeli že 5 možnosti:

$$+1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1, \qquad +1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1, \qquad +1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1,$$

$$+1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1, \qquad +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1.$$

Opazili smo, da se konca zadnjih dveh rešitev pri $n = 3$ ujemata z rešitvami za $n = 2$.

Iz te primerjave smo ugotovili, da so v primeru, ko je delna vsota enaka 0, preostale možne kombinacije do konca enake kot pri enem od manjših n. Zato smo primere v nadaljevanju razdelili glede na to, kdaj delna vsota prvič doseže 0.

Denimo, da se to zgodi po i uporabljenih $+1$. V nadaljevanju imamo nato c_{n-i} možnosti, saj poleg nenegativnih delnih vsot ni dodatnih omejitev. Ker delna vsota pred tem mestom ni smela biti enaka 0, lahko rečemo, da je tu njena najmanjša možna vrednost enaka 1. Ker sta do tega mesta prvi in zadnji člen določena (enaka sta zaporedoma $+1$ in -1), vmesne delne vsota pa ne smejo pasti pod 1, imamo za ta del c_{i-1} možnosti. Število vseh možnosti lahko izračunamo kot produkt vseh možnosti do tega mesta in vseh možnosti za njim. To število je enako $c_{i-1} \cdot c_{n-i}$. Ker je i lahko katerokoli število od 1 do n, je c_n enak vsoti teh produktov za vsak možni i

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i}.$$

Zaradi lažjega računanja zamaknemo spremenljivko v vsoti $i \to k + 1$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k-1}.$$

S tem smo dobili rekurzivno formulo, s katero smo zaključili prvo nalogo.

Pri drugi nalogi nas je zanimalo, na koliko načinov lahko postavimo oklepaje v račun $x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x$, kjer imamo $n+1$ spremenljivk x in n simbolov za množenje, da dobimo enolično vrednost. Pri nizkih n smo ugotovili, da ne glede na postavitev oklepajev natanko en $\cdot$ ostane izven vseh oklepajev. Naloga je začela spominjati na prvo, saj smo lahko omenjeni $\cdot$ postavili v vlogo, ki jo je v prvi nalogi imel dogodek, ko je bila delna vsota prvič enaka nič. Lahko smo izračunali vse kombinacije na levi in jih pomnožili s tistimi na desni. Mesto na katerem je omenjeni $\cdot$ smo poimenovali z i in razvili formulo

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1}c_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k-1}.$$

Rešitev je bila ista, kot v prvi nalogi. V obeh primerih je to rekurzivna formula za računanje Catalanovih števil, ki so že znano matematično zaporedje. Žal pa je računanje z rekurzivnimi formulami pri kasnejših členih izredno počasno, zato smo se vprašali, ali lahko iz prej navedene formule razvijemo eksplicitno. Tega smo se lotili s pomočjo rodovnih funkcij.

2 Rodovne funkcije

Zaporedja lahko zapišemo na različne načine, kar smo si ogledali na primeru potenc števila 2. Eden izmed njih je **eksplicitni zapis**

$$a_n = 2^n.$$

Drugi primer zapisa je **rekurzivni zapis** s formulo

$$a_n = 2a_{n-1}$$

Ogledali smo si še zapis z **rodovnimi funkcijami**, ki imajo obliko

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = Rf(a, X).$$

Uporaben je, ker nam pomaga pri računanju z zaporedji.
Kot primer smo ponovno uporabili zaporedje potenc števila 2.

$$\begin{aligned} Rf(2^n, X) &= a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots = \\ &= 1X^0 + 2X^1 + 4X^2 + 8X^3 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n \end{aligned}$$

2.1 Operacije za računanje

Ko smo rodovne funkcije spoznali, smo jih lahko med seboj tudi **seštevali**. To smo lahko naredili kar po komponentah.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n$$

Za seštevanje smo našli tudi **enoto** in **nasprotni element**.

Enota je število, ki ga lahko pri seštevanju števil prištejemo, ne da bi se število spremenilo. Enota za seštevanje števil je 0. Rodovni funkciji lahko prištejemo rodovno funkcijo za ničelno zaporedje, zato je to enota za seštevanje.

Če elementu prištejemo njegov **nasprotni element**, dobimo 0. Zato je nasprotni element zaporedja a_n drugo zaporedje, ki ima elemente $-a_n$.

Rodovne funkcije lahko med seboj tudi **množimo**.

Kot primer smo vzeli dve končni zaporedji z različnim številom elementov in si ogledali, kako se zmnožita.

$$(a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + a_3 X^3)(b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2) =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{3} a_k X^k \right) \left(\sum_{l=0}^{2} b_l X^l \right)$$

Primer smo posplošili tako, da smo člene, ki v zaporedju ne obstajajo, definirali z 0.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n$$

Do rezultata smo prišli na enak način kot pri množenju polinomov. Enota za množenje je element, s katerim lahko množimo neko vrednost, ne da bi se pri tem spremenila. Pri rodovnih funkcijah je to rodovna funkcija za zaporedje z ničtim členom 1 in ostalimi členi enakimi 0.

2.2 Inverz

Našli smo tudi primer za zaporedje, ki ima inverzni element. To zaporedje je $1, -c, 0, 0 \ldots$, kjer je c poljubno realno število. Rodovna funkcija zaporedja je $(1 - cX)$.

Za neznani inverzni element smo nastavili naslednjo enačbo

$$(1 - cX) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = 1.$$

Iz te enačbe sledi
$$\left(\sum_{k=0}^{2} a_k X^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = 1.$$
Pri X^0 velja
$$1 = a_0 b_0 \Rightarrow b_0 = 1.$$
Pri X^1 velja
$$0 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = -c + b_1 \Rightarrow b_1 = c.$$
Pri X^2 velja
$$0 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = b_2 + (-c)c + 0 = b_2 - c^2 \Rightarrow b_2 = c^2.$$
Podobno smo sklepali pri višjih n. Tako smo prišli do končne ugotovitve, da je $b_n = c^n$.

V naši začetni enačbi lahko b_n zamenjamo s c^n.
$$(1 - cX)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n X^n\right) = 1$$
Tako je inverz rodovne funkcije našega začetnega zaporedja
$$\frac{1}{1 - cX} = \sum_{n=0}^{\infty} c^n X^n.$$

3 Metoda rodovnih funkcij

Želeli smo preoblikovati rekurzivni zapis zaporedja v eksplicitnega, ker nam ta omogoča direkten izračun poljubnega člena. Za primer smo vzeli enačbo
$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \text{ kjer je } n \geq 2.$$
Ničti člen zaporedja je $a_0 = 1$ in prvi člen $a_1 = 2$.

Primer smo reševali z metodo rodovnih funkcij, ki je sestavljena iz več korakov.

Najprej smo zvezo pomnožili z X^n
$$a_n X^n = 2a_{n-1} X^n + 3a_{n-2} X^n, \text{ kjer je } n \geq 2.$$
Nato smo zvezo sešteli po vseh veljavnih n
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n X^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} X^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3a_{n-2} X^n. \tag{1}$$

Vsako od vsot smo želeli spremeniti v obliko rodovnih funkcij.
Leva stran enačbe (1) je enaka

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n X^n = Rf(a, X) - a_0 - a_1 X.$$

Prvi člen desne strani enačbe (1) smo preoblikovali

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} X^n &= 2X \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} X^{n-1} = \\ &= 2X \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n = \\ &= 2X(Rf(a, X) - a_0),\end{aligned}$$

kjer smo pri 2. enačaju v vsoti zamaknili $n \to n - 1$.
Drugi člen desne strani enačbe (1) smo prav tako preoblikovali

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} 3a_{n-2} X^n &= 3X^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} X^{n-2} = \\ &= 3X^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \\ &= 3X^2(Rf(a, X))\end{aligned}$$

in enako kot v prejšnjem primeru zamaknili $n \to n - 2$.
Dobili smo zvezo rodovnih funkcij

$$Rf(a, X) - a_0 - a_1 X = 2X(Rf(a, X) - a_0) + 3X^2(Rf(a, X)).$$

Rodovno funkcijo smo nato za lažji zapis zamenjali s spremenljivko z in jo izrazili.

$$\begin{aligned}z - a_0 - a_1 X &= 2X(z - a_0) + 3X^2 z \\ z - a_0 - a_1 X &= 2Xz - 2Xa_0 + 3X^2 z \\ 3X^2 z + 2Xz - z &= 2Xa_0 - a_0 - a_1 X \\ z(3x^2 + 2X - 1) &= 2X - 1 - 2X \\ z(3X - 1)(X + 1) &= -1 \\ z &= \frac{-1}{(3X - 1)(X + 1)}\end{aligned}$$

Od prej smo poznali rodovno funkcijo za inverz oblike $\frac{1}{1-cX}$, zato smo želeli tudi zdaj dobiti vsoto ulomkov take oblike. To smo naredili z metodo nastavka.

$$\begin{aligned} z &= \frac{A}{X+1} + \frac{B}{3X-1} \\ z &= \frac{A(3X-1)+B(X+1)}{(X+1)(3X-1)} \\ A(3X-1)+B(X+1) &= -1 \\ 3XA - A + BX + B &= -1 \end{aligned}$$

Iz dobljene enačbe smo z ločitvijo glede na stopnjo X dobili sistem dveh enačb s spremenljivkama A in B.

$$\begin{aligned} B + 3A &= 0 \\ -A + B &= -1 \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{4},\ B = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Dobljeni števili smo vstavili v prej nastavljena ulomka.

$$z = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{-3}{4(3X-1)}$$

Ulomka smo spremenili v obliko $\frac{1}{1-cX}$, ki jo znamo zapisati z rodovno funkcijo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+X} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-X)} \\ &\Rightarrow \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^n \\ \frac{-3}{4} \cdot \frac{1}{3X-1} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-3X} \\ &\Rightarrow \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n X^n \end{aligned}$$

Vse vsote smo vstavili v izraženo enačbo za z.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n X^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{1}{4} + 3^n \frac{3}{4}\right) X^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = (-1)^n \frac{1}{4} + 3^n \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left((-1)^n + 3^{n+1}\right)$$

S tem smo našli eksplicitni zapis za zaporedje in zaključili našo metodo rodovnih funkcij.

4 Catalanova števila

Vrnimo se h Catalanovim številom. Na njih smo uporabili metodo rodovnih funkcij in poskusili najti eksplicitni zapis.

Rekurzivni zapis je

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1},$$

pri čemer velja $n \geq 1$ in $c_0 = 1$.

Metodi sledimo do enačbe za rodovno funkcijo.

$$\begin{aligned}
c_n X^n &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}\right) X^n \\
\sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}\right) X^n \\
Rf(c,X) - c_0 &= X \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}\right) X^{n-1} \\
n &\rightarrow n+1 \\
Rf(c,X) - 1 &= X \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) X^n \\
Rf(c,X) - 1 &= X \cdot Rf(c,X)^2
\end{aligned}$$

V zadnjem koraku smo uporabili formulo za produkt rodovnih funkcij. Vidimo, da smo dobili kvadratno enačbo. Da bi se pri rešitvi izognili X v imenovalcu, celo enačbo pomnožimo z X in vstavimo $z = Rf(c,X) \cdot X$.

$$\begin{aligned}
Rf(c,X)^2 \cdot X^2 - Rf(a,X) \cdot X + X = 0 \\
z^2 - z + X = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2}$$

Za zapis korena z rodovno funkcijo moramo spoznati še nekaj dodatnih pojmov.

5 Binomska rodovna funkcija

Definicija 1. ***Binomski simbol*** $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$*, kjer sta* m*,* $n \in \mathbb{N}$ *in* $n \leq m$*, je izraz, ki nam pove, koliko podmnožic velikosti* n *ima množica velikosti* m*.*

Binomski simbol lahko zapišemo tudi na način

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} &= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)!}{m!(m-n)!} = \\ &= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}.\end{aligned}$$

Tu vidimo, da se za $n > m$ produkt v števcu vedno množi v 0, zato je binomski simbol tedaj enak 0. V tej obliki lahko definiramo posplošen binomski simbol za realno število z in naravno število n.

$$\binom{z}{n} = \frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!}$$

Uporabili smo tudi **formulo za izračun potence dvočlenika**

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^n b^{m-n}.$$

Vanjo smo vstavili formalno vsoto $(1 + cX)$ in dobili

$$(1+cX)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} c^n X^n.$$

Definicija 2. ***Binomska rodovna funkcija*** *je rodovna funkcija oblike*

$$B_z(cX) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} c^n X^n,$$

kjer sta z *in* c *realni števili.*

Pri reševanju enačbe $Rf(c,X)^2 \cdot X^2 - Rf(c,X) \cdot X + X = 0$ smo s formulo za reševanje kvadratnih enačb dobili $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2}$. Za reševanje dvočlenika pod korenom nam pomaga naslednja trditev.

Trditev 1. *Za realna števila z, y in c velja*

$$B_z(cX) \cdot B_y(cX) = B_{z+y}(cX).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
B_z(cX) \cdot B_y(cX) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{n} c^n X^n\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{n} c^n X^n\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{z}{k} c^k \binom{y}{n-k} c^{n-k}\right) X^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{z}{k} \binom{y}{n-k}\right) c^n X^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z+y}{n} c^n X^n = \\
&= B_{z+y}(cX).
\end{aligned}$$

Predzadnja enakost velja, saj velja sledeča lema. □

Lema 1. *Za poljubni realni števili z in y velja*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{z}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{z+y}{n}.$$

Dokaz. Enakost dokažemo le za naravni števili z in y.
Binomski simbol $\binom{z+y}{n}$ šteje vse podmnožice množice $z+y$ velikosti n. Vsaka podmnožica vključuje kombinacijo elementov obeh množic. Ker dobimo vse podmnožice, dobimo tudi vse različne kombinacije števil elementov iz z in y. To lahko preštejemo tudi drugače. S spremenljivko k označimo število izbranih elementov iz z. Velja, da k leži med 0 in n. Tedaj iz y vzamemo $n-k$ elementov. Ko seštejemo produkte binomskih simbolov $\binom{z}{k}$ in $\binom{y}{n-k}$ po vseh k, prav tako dobimo število vseh podmnožic. To pomeni, da sta izraza na obeh straneh enačaja res enaka.

□

Spomnimo se, da smo iskali $\sqrt{1-4X}$. Ker velja

$$B_1(-4X) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} (-4)^n X^n = \sum_{n=0}^{1} \binom{1}{n} (-4)^n X^n = 1 - 4X,$$

z zvezo iz trditve dobimo

$$B_1(-4X) = B_{\frac{1}{2}}(-4X) \cdot B_{\frac{1}{2}}(-4X) = B_{\frac{1}{2}}(-4X)^2.$$

Enakost korenimo in dobimo

$$\sqrt{1-4X} = B_{\frac{1}{2}}(-4X).$$

6 Izračun binomske vrste

Izračunati smo morali še željeno binomsko vrsto

$$B_{\frac{1}{2}}(-4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n X^n.$$

Najprej smo izračunali binomski simbol, ki je pri $n = 0$ enak 1, pri višjih n pa smo ga lahko poenostavili

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!} = \\
&= \frac{1(1-2\cdot 1)(1-2\cdot 2)\cdots(1-2(n-1))}{n!\cdot 2^n} = \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!\cdot 2^n\cdot(-1)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Binomski simbol smo vstavili v vsoto in dobili

$$B_{\frac{1}{2}}(-4x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!\cdot 2^n\cdot(-1)^{n-1}}(-4)^n X^n. \tag{2}$$

V členih vsote smo krajšali skupne člene in ulomke razširili z $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2) = (n-1)!\cdot 2^{n-1}$. Dobili smo

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!} 2^n X^n = \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!\cdot(n-1)!\cdot 2^{n-1}} 2^n X^n.
\end{aligned}$$

Zamaknili smo spremenljivko v vsoti $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!} 2X^{n+1} = \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{2}{n+1} X^{n+1}.
\end{aligned}$$

Izračunano vsoto smo vstavili v (2) in dobili

$$\sqrt{1-4X} = B_{\frac{1}{2}}(-4x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{2}{n+1} X^{n+1}.$$

6.1 Končni izračun

Izračunano vsoto smo vstavili v formulo za rešitev kvadratne enačbe

$$\begin{aligned}\frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2} &= \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - X \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} X^n \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + X \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} X^n.\end{aligned}$$

Vstavljeno smo odšteli, saj smo v tem primeru dobili pozitivne člene v rodovni funkciji.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} X^{n+1}$$

Iz enačbe smo zdaj člene zaporedja le še prebrali.

$$c_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$$

To je eksplicitni zapis za n-ti člen Catalanovega zaporedja, ki smo ga iskali.

Literatura

[1] Zapiski predavanj predmeta diskretna matematika 1, profesorja dr. Romana Drnovška (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, študijsko leto 2019/2020).

[2] *Generating function*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 29. 7. 2021], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Generating_function`.