Möbiusove transformacije

Miha Brvar, Manca Ernst, Tjaša Gregorič
Mentor: Izak Jenko

Povzetek

Ukvarjali se bomo z Möbiusovimi transformacijami. To so preslikave v kompleksni ravnini s točko v neskončnosti, ki ohranjajo krožnice in premice. Obravnavali bomo tudi stereografsko projekcijo, ki slika točke s sfere na ravnino.

1 Uvod v kompleksna števila

Preden začnemo z obravnavo Möbiusovih transformacij, si poglejmo kompleksna števila.

Osnovni element množice kompleksnih števil je imaginarna enota, ki jo označujemo z i. Določena je z zvezo $i^2 = -1$. Uporablja se pri zapisovanju kompleksnih števil. Kompleksno število je sestavljeno iz dveh komponent, in sicer iz realne, ki jo običajno označimo s spremenljivkama x ali a, in imaginarne, ki se jo običajno označi s spremenljivkama y ali b. Ti dve komponenti sta realni števili. Kompleksno število z realno komponento x in imaginarno komponento y zapišemo kot

$$z = x + iy,$$

množico kompleksnih števil pa označimo s

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Konjugirana vrednost kompleksnega števila z je število, ki ima enako realno in nasprotno imaginarno komponento. Označi se z $\bar{z}$. Lastnosti konjugirane vrednosti so

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{z}} &= z, \\
\overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, \\
\overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w}, \\
\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}}, \\
z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z).
\end{aligned}$$

Geometrijsko operacija konjugiranja predstavlja zrcaljenje čez realno os.

Absolutna vrednost kompleksnega števila je oddaljenost točke, ki predstavlja to kompleksno število, od koordinatnega izhodišča. Absolutna vrednost števila $z = a + ib$ je tako ravno dolžina krajevnega vektorja točke z. Izračunamo jo kot

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Navedimo nekatere lastnosti:

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= z \cdot \bar{z}, \\
z \cdot \bar{z} &= \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2, \\
|\bar{z}| &= |z|.
\end{aligned}$$

1.1 Seštevanje in množenje kompleksnih števil

Kompleksna števila seštevamo tako, da posebej seštejemo realni in posebej imaginarni komponenti.

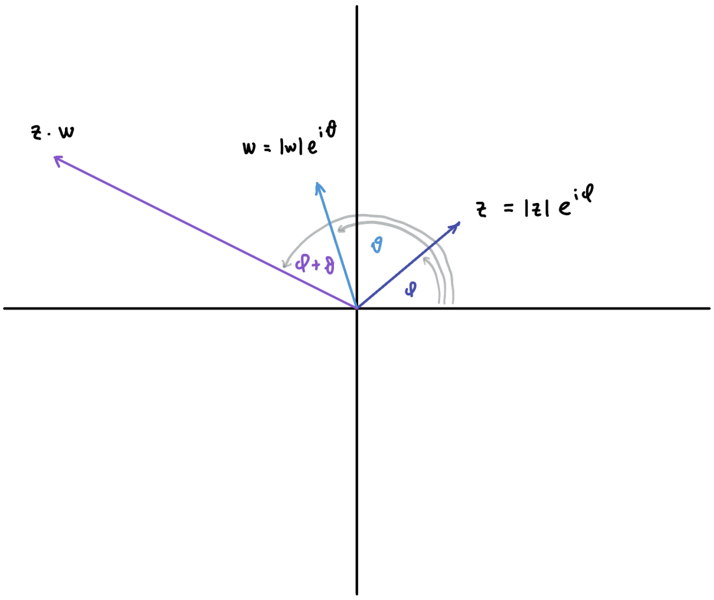
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

Pri seštevanju upoštevamo komutativnost in asociativnost. Seštevanje kompleksnih števil geometrijsko ustreza seštevanju vektorjev. Če seštejemo kompleksni števili z in w, je njuna vsota ravno krajevni vektor točke $z + w$.

Kompleksna števila množimo tako, kot množimo dvočlenike, zraven pa še upoštevamo, da je $i^2 = -1$.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Pri množenju dveh kompleksnih števil se njuni absolutni vrednosti zmnožita, kota, ki ju oklepata krajevna vektorja teh števil z realno osjo, pa se seštejeta.



Slika 1: Množenje kompleksnih števil.

Ker je $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, velja

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, \\ i^3 &= -i, \\ i^4 &= 1. \end{aligned}$$

Kompleksno število lahko zapišemo tudi v **polarni obliki**. Za ta zapis moramo vpeljati kot ali argument kompleksnega števila. Argument φ kompleksnega števila z je velikost kota med pozitivnim poltrakom realne osi ter poltrakom skozi izhodišče in točko z, merjenega v pozitivni smeri. Ob tem imamo tudi Eulerjev zapis

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Poseben primer tega je Eulerjeva formula $e^{i\pi} + 1 = 0$.

1.2 Kompleksna ravnina

Kompleksna števila lahko predstavimo kot točke v kompleksni ravnini. Število $z = x + iy$ predstavimo s točko (x, y). Abscisno os imenujemo realna os in jo označimo z Re, ordinatno pa imenujemo imaginarna os in jo označimo z Im.

Realna komponenta kompleksnega števila je enaka

$$\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \tag{1}$$

imaginarna pa

$$\mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{2}$$

Poljubno premico v ravnini znamo opisati z enačbo $ax + by = c$. Za nadaljevanje pa bo koristno izpeljati predpis za enačbo premice, v kateri bo nastopala kompleksna spremenljivka $z = x + iy$.

Če enačbi (1) in (2) vstavimo v enačbo za premico, dobimo $a(\frac{z+\bar{z}}{2}) + b(\frac{z-\bar{z}}{2i}) = c$. Iz tega izpeljemo

$$\begin{aligned} c &= \frac{az + a\bar{z}}{2} + \frac{bz - b\bar{z}}{2i} \\ &= \frac{i(az + a\bar{z}) + bz - b\bar{z}}{2i} \\ &= \frac{i^3(azi + a\bar{z}i + bz - b\bar{z})}{2} \\ &= \frac{az + a\bar{z} - bzi + b\bar{z}i}{2} \\ &= \frac{z(a - bi) + \bar{z}(a + bi)}{2} \\ &= \frac{\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}}{2}. \end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo uvedli oznako $\alpha = a + bi$. Opazimo, da je na desni strani ravno realni del števila $\bar{\alpha}z$, zato je z enačbo

$$\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z) = c$$

določena premica v kompleksni ravnini.

Krožnica je definirana kot množica točk, ki so enako oddaljene od nekega središča. Enačba krožnice v kompleksni ravnini s središčem v točki α in polmerom $r > 0$ se zapiše kot

$$|z - \alpha| = r.$$

2 Stereografska projekcija

Naj bo S^2 enotska sfera v $\mathbb{R}^3$, podana kot množica točk

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

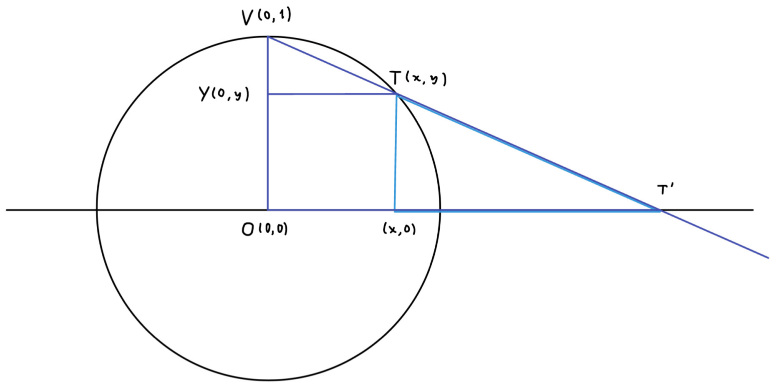
Ta sfera ima središče v izhodišču koordinatnega sistema, njen polmer pa je enak 1. Radi bi poiskali preslikavo Ψ, ki bijektivno slika točke s te sfere na ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Najprej obravnavajmo primer v dveh dimenzijah. Naj bo

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

enotska krožnica in V točka v ravnini s koordinatami $(0, 1)$. Potegnimo poltrak z izhodiščem v V skozi poljubno točko $T(x, y)$, pri čemer $T \neq V$, na enotski krožnici. Presečišče tega poltraka z abscisno osjo označimo s $T'(r, 0)$. Zdaj bomo poiskali predpis preslikave Ψ, ki slika $T \mapsto T'$.

Naj bo O izhodišče koordinatnega sistema in Y točka $(0, y)$ na ordinatni osi.



Slika 2: Stereografska projekcija v dveh dimenzijah.

Zaradi vzporednosti daljic $YT \parallel OT'$ je $\angle TYV = \angle T'OV = 90°$. Ker velja tudi $\angle YVT = \angle OVT'$, imata trikotnika $\triangle VYT$ in $\triangle VOT'$ vse tri kote enake in sta podobna. Iz tega sledi

$$\frac{1 - y}{x} = \frac{1}{r},$$

od koder dobimo

$$r = \frac{x}{1-y}.$$

V dvorazsežnem primeru je torej predpis take preslikave

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{1-y}, 0\right).$$

Iz enačbe je razvidno tudi, da gre r v neskončnost, ko gre y proti 1.

Izpeljimo še predpis tovrstne preslikave za trirazsežni primer, za katerega se izkaže, da ni bistveno bolj zapleten.

Naj bo V vrh sfere S^2 s koordinatami $(0, 0, 1)$ in $T(x, y, z)$ točka na sferi, različna od V. S $T'(x', y', 0)$ označimo točko, v kateri poltrak z izhodiščem v V, ki gre skozi T, seka ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Označimo še točki $A(0, 0, z)$ in $O(0, 0, 0)$ ter $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Kot v dvorazsežnem primeru opazimo $\angle TAV = \angle T'OV = 90°$ zaradi vzporednosti daljic $AT \parallel OT'$ ter $\angle AVT = \angle OVT'$, iz česar sledi podobnost trikotnikov $\triangle VAT$ in $\triangle VOT'$. Od tod dobimo

$$\frac{1-z}{r} = \frac{1}{r'},$$
$$r' = \frac{r}{1-z}.$$

Točka T' tako leži na poltraku v smeri vektorja $(x, y, 0)$ in razdalji r' od izhodišča, zato bo

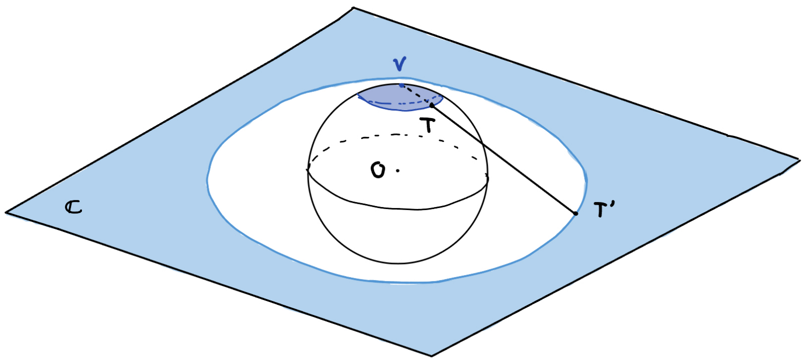
$$T'(x', y', 0) = r' \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{1-z}(x, y, 0),$$

pri čemer je $\frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ normiran vektor, ki določa smer. Tako smo prišli do predpisa za preslikavo Ψ.

Definicija 1. ***Stereografska projekcija*** *je preslikava* $\Psi : S^2 \setminus \{V\} \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$*, podana s predpisom*

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right).$$

Ta preslikava slika vse točke s sfere S^2, razen V, na xy-ravnino. Spet pa vidimo, da gre T' proti neskončnosti, ko se točka T približuje vrhu V. Točka V bi se torej slikala v neskončnost, toda v kompleksni ravnini nimamo točke v neskončnosti. Tako pridemo do naslednje definicije.



Slika 3: Stereografska projekcija v trirazsežnem prostoru.

Definicija 2. ***Riemannova sfera*** *$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je kompleksna ravnina, ki vsebuje tudi točko v neskončnosti.*

Naslednja trditev nam pove, da lahko točke na Riemannovi sferi bijektivno identificiramo s točkami enotske sfere, kar pojasni to poimenovanje.

Trditev 1. *Preslikava $\Phi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$, podana s predpisom*

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}; & z \neq 1 \\ \infty; & z = 1 \end{cases},$$

je bijektivna.

Dokaz. Dovolj je pokazati, da ima Φ inverz. Ta je podan s predpisom

$$\Phi^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1),$$

pri čemer je $\Phi^{-1}(\infty) = (0, 0, 1)$. Prepričati se moramo, da je Φ^{-1} res inverz preslikave Φ. Veljati morata enakosti $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}$ in $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}$, ki ju preverimo z računom.

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \Phi^{-1})(x + iy) &= \Phi\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\ &= \frac{\frac{2x}{x^2+y^2+1}}{\frac{2}{x^2+y^2+1}} + i\frac{\frac{2y}{x^2+y^2+1}}{\frac{2}{x^2+y^2+1}} \\ &= x + iy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\Phi^{-1} \circ \Phi)(x,y,z) &= \Phi^{-1}\left(\frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}\right) \\
&= \frac{1}{X^2+Y^2+1}\left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, X^2+Y^2-1\right)
\end{aligned}
$$

Tu smo z X in Y označili $X = \frac{x}{z-1}$ ter $Y = \frac{y}{z-1}$. Upoštevamo še, da je $x^2+y^2+z^2 = 1$ in dobimo

$$
\begin{aligned}
(\Phi^{-1} \circ \Phi)(x,y,z) &= \frac{1-z}{2}\left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, \frac{2z}{1-z}\right) \\
&= (x,y,z).
\end{aligned}
$$

Ker veljata enakosti $(\Phi \circ \Phi^{-1})(x+iy) = x+iy$ in $(\Phi^{-1} \circ \Phi)(x,y,z) = (x,y,z)$, je Φ^{-1} res inverz preslikave Φ. Iz tega sledi, da je preslikava Φ bijektivna. $\square$

3 Möbiusove transformacije

Definicija 3. *Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, da velja*

$$ad - bc \neq 0 \ .$$

Preslikava $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, podana s predpisom

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

*se imenuje **Möbiusova transformacija** ali **ulomljena linearna preslikava**.*

Opomba 1. *Če je $ad = bc$, je bodisi $a = b = c = d = 0$, bodisi je vsaj eden od koeficientov različen od 0. Zaradi simetrije izraza $ad - bc$ lahko brez škode za splošnost prepostavimo $d \neq 0$. Potem imamo*

$$a = \frac{bc}{d},$$

iz česar sledi

$$\frac{\frac{bc}{z}z+b}{cz+d} = \frac{\frac{bcz+bd}{d}}{cz+d} = \frac{b(cz+d)}{d(cz+d)} = \frac{b}{d}.$$

Taka preslikava je torej konstantna.

Definirajmo še $\varphi\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ in $\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$ v primeru, ko je $c \neq 0$. Če je $c = 0$, pa imamo $\varphi(\infty) = \infty$.

V primeru, ko je $c \neq 0$, je pol te preslikave $-\frac{d}{c}$, ko pa je $c = 0$, je pol preslikave ∞.

Ulomljeno linearno preslikavo določajo dani $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Če vsakega pomnožimo z istim neničelnim $\lambda \in \mathbb{C}$, opazimo, da dobimo enako preslikavo

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda c + \lambda d},$$

zato lahko predpostavimo, da velja $ad - bc = 1$.

Trditev 2. *Poljubna Möbiusova transformacija je bijektivna preslikava.*

Dokaz. Naj bo $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ Möbiusova transformacija s predpisom

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Dovolj je pokazati, da ima φ inverz. Označimo $w = \varphi(z)$. Inverz φ^{-1} je podan s predpisom

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Potem z računom pokažemo, da je $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(z) = z$ za vse $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1} \circ \varphi)(z) &= \varphi^{-1}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\
&= \frac{-d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - a} \\
&= \frac{\frac{-d(az+b)+b(cz+d)}{cz+d}}{\frac{c(az+b)-a(cz+d)}{cz+d}} \\
&= \frac{-daz - db + bcz + bd}{caz + cb - acz - ad} \\
&= \frac{z(bc-ad)}{bc-ad} \\
&= z
\end{aligned}$$

Analogno pokažemo še, da je $(\varphi \circ \varphi^{-1})(z) = z$ za vse $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. ☐

Trditev 3. *Kompozitum Möbiusovih transformacij je Möbiusova transformacija.*

Dokaz. Naj bosta $\varphi, \psi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ Möbiusovi transformaciji, podani s predpisoma

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{in} \quad \psi(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

Potem je

$$(\varphi \circ \psi)(z) = \varphi\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+a\beta+b\delta}{(c\alpha+d\gamma)z+c\beta+d\delta},$$

torej je tudi $\varphi \circ \psi$ Möbiusova transformacija. □

Trditev 4. *Za vsake tri različne točke z Riemannove sfere obstaja Möbiusova transformacija, ki jih preslika v poljubne tri različne točke z Riemannove sfere.*

Dokaz. Naj bodo α, β, γ tri različne točke v $\widehat{\mathbb{C}}$. Najprej pokažimo, da obstaja Möbiusova transformacija $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, ki slika

$$\alpha \mapsto 0, \quad \beta \mapsto 1, \quad \gamma \mapsto \infty.$$

To dosežemo s preslikavo

$$\varphi(z) = \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} \cdot \frac{z-\alpha}{z-\gamma}.$$

Če so α', β', γ' poljubne druge tri različne točke v $\widehat{\mathbb{C}}$ in je ψ Möbiusova transformacija, ki slika

$$\alpha' \mapsto 0, \quad \beta' \mapsto 1, \quad \gamma' \mapsto \infty,$$

potem je $\psi^{-1} \circ \varphi$ iskana Möbiusova transformacija, ki preslika

$$\alpha \mapsto \alpha', \quad \beta \mapsto \beta', \quad \gamma \mapsto \gamma'.$$ □

Trditev 5. *Vsaka Möbiusova transformacija je kompozicija naslednjih treh preslikav:*

- **sučni razteg**: $\rho_\alpha(z) = \alpha z$ za $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- **vzporedni premik**: $\tau_\beta(z) = z + \beta$ za $\beta \in \mathbb{C}$,
- **inverzija**: $\iota(z) = \frac{1}{z}$.

Dokaz. Dokazati želimo, da lahko preslikavo $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ zapišemo kot kompozitum transformacij ρ_α, τ_β in ι za $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $\beta \in \mathbb{C}$. Pokazali bomo, da lahko samo s kompozicijami teh preslikav izrazimo φ.

Ločimo primera $c \neq 0$ in $c = 0$.

- Če je $c \neq 0$, lahko zapišemo

$$z \xmapsto{\rho_c} cz \xmapsto{\tau_d} cz + d \xmapsto{\iota} \frac{1}{cz+d} \xmapsto{\rho_{b-\frac{ad}{c}}} \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$$
$$\xmapsto{\tau_{\frac{a}{c}}} \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d} = \varphi(z).$$

- Če je $c = 0$, pa imamo

$$z \xmapsto{\rho_{\frac{a}{d}}} \frac{a}{d}z \xmapsto{\tau_{\frac{b}{d}}} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \varphi(z).$$

Tako dobimo

$$\varphi = \tau_{\frac{a}{c}} \circ \rho_{b-\frac{ad}{c}} \circ \iota \circ \tau_d \circ \rho_c,$$

kadar je $c \neq 0$, in

$$\varphi = \tau_{\frac{b}{d}} \circ \rho_{\frac{a}{d}}$$

v primeru, ko je $c = 0$. □

Izrek 1. *Möbiusove transformacije slikajo premice in krožnice v premice in krožnice.*

Dokaz. Po trditvi 5 je vsaka Möbiusova transformacija kompozitum vzporednih premikov, sučnih raztegov in inverzije. Vzporedni premik in sučni razteg očitno ohranjata krožnice in premice, zato zadošča trditev pokazati samo za inverzijo.

Najprej obravnavamo premice. Naj bo $\varphi(z) = \frac{1}{z} = w$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha z) = b\}$ premica v kompleksni ravnini. Slika te premice z inverzijo ι je množica

$$\left\{ w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\left(\alpha \frac{1}{w}\right) = b \right\}.$$

Poglejmo si, kaj nam pove pogoj

$$\mathrm{Re}(\alpha z) = \mathrm{Re}\left(\alpha \frac{1}{w}\right) = b.$$

Vemo, da velja

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Iz tega sledi

$$\frac{\alpha}{w} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{w}} = 2b$$
$$\alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w = 2b|w|^2. \tag{3}$$

Zdaj ločimo dva primera.

- Če je $b = 0$, imamo

$$\alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w = 0 = \mathrm{Re}(\bar{\alpha}w),$$

torej se premica slika v premico.

- Če je $b \neq 0$, se spomnimo enačbe krožnice $|z - \beta| = r$. To enačbo kvadriramo in dobimo

$$|z|^2 - \bar{\beta}z - \beta\bar{z} + |\beta|^2 = r^2.$$

Enačbo (3) lahko tedaj preoblikujemo v podobno obliko, iz katere lahko razberemo središče in radij krožnice, ki jo ta podaja.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\bar{w}}{2b} + \frac{\bar{\alpha}w}{2b} &= |w|^2 \\ \left|w - \frac{\alpha}{2b}\right| &= \left|\frac{\alpha}{2b}\right| \end{aligned}$$

Vidimo, da se v tem primeru premica slika v krožnico s središčem v $\frac{\alpha}{2b}$ in radijem $\left|\frac{\alpha}{2b}\right|$. Ta krožnica očitno poteka skozi koordinatno izhodišče.

Obravnavajmo še krožnice. Naj bo $\varphi(z) = \frac{1}{z} = w$. Krožnica, podana z enačbo $|z - \alpha| = r$, se z inverzijo ι preslika v množico

$$\left\{w \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{1}{w} - \alpha\right| = r\right\}.$$

Podobno kot prej si oglejmo, kaj nam pove pogoj $|z - \alpha| = r$. Imamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{w}\right|^2 - \bar{\alpha}\frac{1}{w} - \alpha\frac{1}{\bar{w}} + |\alpha|^2 &= r^2, \\ 1 - \bar{\alpha}\bar{w} - \alpha w + |\alpha|^2|w|^2 &= r^2|w|^2, \\ 1 - \bar{\alpha}\bar{w} - \alpha w + |w|^2(|\alpha|^2 - r^2) &= 0. \end{aligned}$$

Spet ločimo dva primera.

- Če je $r^2 = |\alpha|^2$, imamo

$$\frac{\alpha w + \bar{\alpha}\bar{w}}{2} = \frac{1}{2} = \mathrm{Re}(\alpha w).$$

Vidimo, da se krožnica, ki poteka skozi izhodišče, preslika v premico, ki ne poteka skozi izhodišče.

- Če je $r^2 \neq |\alpha|^2$, pa imamo

  $$|w|^2 - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\bar{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}w + \frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} = 0$$

  in opazimo, da ta enačba podaja krožnico. Če definiramo

  $$\beta = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$$

  in na obeh straneh enačbe prištejemo $|\beta|^2$, dobimo

  $$\left|w - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right|^2 = \left(\frac{r}{|\alpha|^2 - r^2}\right)^2$$
  $$\left|w - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right| = \left|\frac{r}{|\alpha|^2 - r^2}\right|.$$

  To je ravno enačba krožnice s središčem v β in radijem $\left|\frac{r}{|\alpha|^2-r^2}\right|$.

Skupaj od tod sledi, da Möbiusove transformacije res ohranjajo premice in krožnice.

- Premice, ki potekajo skozi izhodišče, se preslikajo v premice skozi izhodišče.
- Premice, ki ne sekajo izhodišča, se preslikajo v krožnice, ki potekajo skozi izhodišče.
- Krožnice, ki potekajo skozi izhodišče, se preslikajo v premice, ki ne sekajo izhodišča.
- Krožnice, ki ne sekajo izhodišča, se preslikajo v krožnice, ki ne sekajo izhodišča. □

Primer 1. *Naj bosta Ω in D množici točk*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| > 1 \textit{ in } |z - 2i| < 2\},$$
$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}.$$

Poiščimo Möbiusovo transformacijo φ, ki območje Ω preslika v D.

Po definiciji ima taka preslikava predpis

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

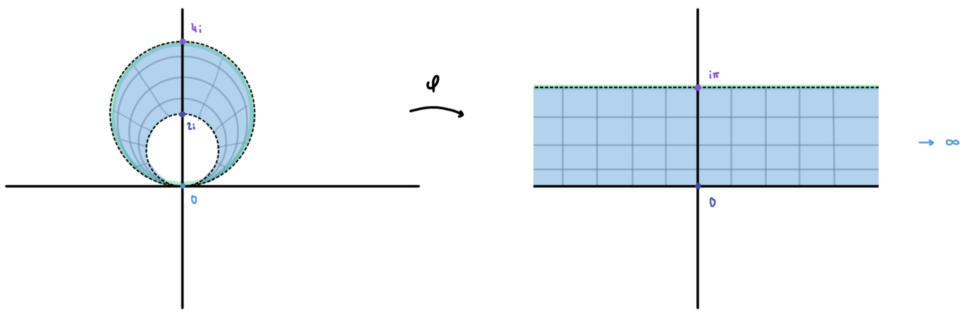
Ker je $ad - bc \neq 0$, lahko brez škode za splošnost predpostavimo $c = 1$, torej je

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{z+d}.$$

Zaradi trditve 4 vemo, da za vsake tri točke obstaja Möbiusova transformacija, ki jih preslika v poljubne tri točke. Zato je dovolj poiskati, kam se preslikajo neke tri točke. Opazimo, da se krožnici $|z - 2i| = 2$ in $|z - i| = 1$ preslikata v vzporedni premici $\mathrm{Im}(z) = \pi$ in $\mathrm{Im}(z) = 0$. Območje, ki ga omejujeta krožnici, se zato preslika ravno v območje, ki ga omejujeta ti dve premici, torej v pas D.

Zdaj imamo $0 \mapsto \infty$, $2\pi \mapsto 0$ in $4i \mapsto \pi$. Če to vstavimo v predpis za preslikavo φ, dobimo $a = 2\pi i, b = 4\pi$ in $d = 0$, torej je predpis preslikave

$$\varphi(z) = \frac{2\pi i z + 4\pi}{z}.$$



Slika 4: Primer Möbiusove transformacije.

Literatura

[1] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza II*, verzija 10. 8. 2010, [ogled 28. 7. 2022], dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf`.