# Gnetenje prostorov

Lenart Dolinar, Katarina Grilj, Luka Peruš
Mentorica: Katarina Šipec


**Povzetek**

V članku sta definirani topologija in homotopija ter predstavljeni primeri homotopije. Definirana je retrakcija in dokazana ekvivalenca med obstojem retrakcije diska na sfero in kontraktibilnostjo krožnice ter predstavljena razlika med šibkim in krepkim deformacijskim retraktom.

## 1 Uvod

Homotopija je zvezen prehod z ene preslikave na drugo. Najprej bomo s pomočjo topologije opisali zveznost, sledi nekaj primerov topologij, za sladico pa okusimo še (krepke) deformacijske retrakte. Bistvo članka je dokaz ekvivalence med obstojem retrakcije diska na krožnico in kontraktibilnostjo krožnice.

# 2 Preslikave in zveznost

## 2.1 Preslikave

**Preslikava** $f : A \to B$ je sestavljena iz domene, kodomene in predpisa. Vsaka preslikava je celovita in enolična, kar pomeni, da vsakemu elementu iz $A$ priredi natanko en element iz $B$.
Ne zanimajo nas le poljubne preslikave, vendar želimo, da obravnavane preslikave slikajo bližnje točke v bližnje točke.

**Definicija 1.** *Množica $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je* ***odprta****, če za vsako točko $x \in X$ obstaja tak $r \in R$, da je $B(x,r) \subseteq X$, kjer $B$ predstavlja odprto kroglo. Definiramo* ***odprto kroglo*** *v $\mathbb{R}^n$ s središčem v $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$ in radijem $r$ kot*

$$B(a,r) = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - x_i)^2} = |a - x| < r \right\}.$$

## 2.2 Topologija

**Definicija 2.** *Naj bo $X$ množica in $\mathcal{P}(X)$ potenčna množica, torej množica podmnožic. Družina $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ je* ***topologija*** *na $X$, če:*

- $\emptyset, X \in \tau$,
- $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,
- $(\{A_i; i \in I\} \subseteq \tau$ *za neko indeksno množico* $I) \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

*Množicam iz $\tau$ pravimo* ***odprte****.* ***Topološki prostor*** *je prostor, opremljen s topologijo.*

Primeri topologij:

- $X = \{1, 2, 3\}, \tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X\}$,
- $\tau := \emptyset, X$ (trivialna topologija),
- $\tau := \mathcal{P}(X)$ (diskretna topologija),
- v **Evklidski** topologiji na $\mathbb{R}^n$ so odprte množice natanko unije odprtih krogel.

## 2.3 Zveznost

Običajna "$\varepsilon$-$\delta$" definicija zveznosti je zapletena, s pomočjo topologije pa jo prevedemo na preprostejšo definicijo s pomočjo odprtih množic.

**Definicija 3.** *Preslikava $f : A \to B$ je **zvezna**, če je praslika*

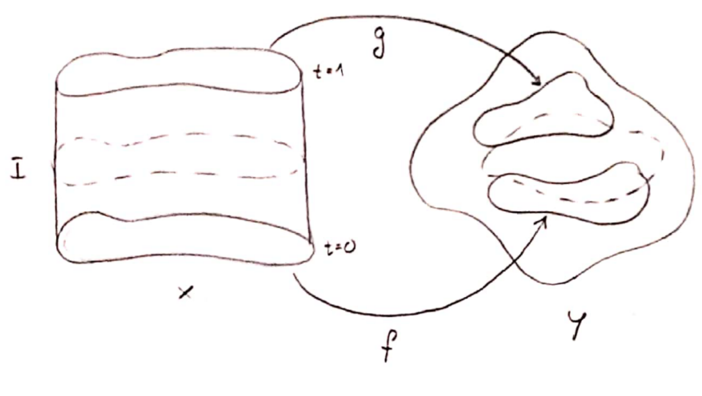
$$f^{-1}(Y) = \{x \in X;\ f(x) \in Y\}$$

*odprta za vsako odprto množico $Y \in \tau_B$.*

Za zvezne preslikave v nadaljevanju lahko zveznost hitro preverimo.

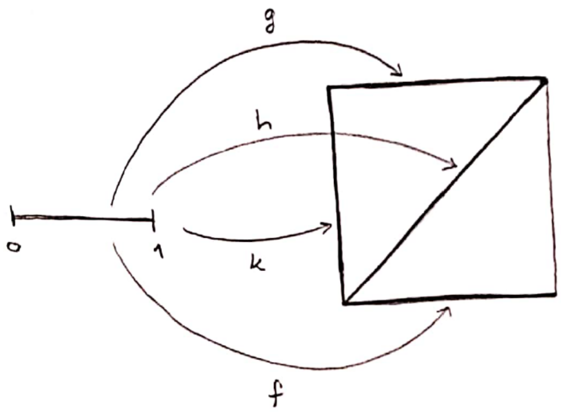
# 3 Homotopija

Homotopija opiše zvezno transformacijo z ene preslikave na drugo. Naj bosta $X$ in $Y$ topološka prostora in $f, g : X \to Y$ zvezni preslikavi. **Homotopija** od $f$ do $g$ je zvezna preslikava $H : X \times [0,1] \to Y$, za katero je $H(x,0) = f(x)$ in $H(x,1) = g(x)$ za vsak $x \in X$. Dve preslikavi sta **homotopni**, če med njima obstaja homotopija.




**Zgled 1.** Definirajmo preslikave z intervala na kvadrat.

$$\begin{gathered}
f, g, h, k : [0,1] \to [0,1]^2 \\
f : x \to (x, 0) \\
g : x \to (x, 1) \\
h : x \mapsto (x, x) \\
k : x \mapsto (0, x)
\end{gathered}$$




Homotopija od $f$ do $g$ je:

$$H_{fg} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]^2,$$
$$(x,t) \mapsto (x,t).$$

Preslikava $H$ res izpolnjuje pogoje homotopije. Ker je elementarna je tudi zvezna. Pri času $t = 0$ res dobimo točke na spodnji daljici, kamor interval preslika preslikava $f$, pri času $t = 1$ pa dobimo zgornjo stranico kvadrata. Pri nekem vmesnem času $t$ dobimo daljico na višini $t$.
Podobno utemeljimo pogoje iz definicije homotopije za naslednje preslikave.
Homotopija od $g$ do $f$ je:

$$H_{gf} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]^2,$$
$$(x,t) \mapsto (x, 1-t).$$

Homotopija od $f$ do $h$ je:

$$H_{fh} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]^2,$$
$$(x,t) \mapsto (x, tx).$$

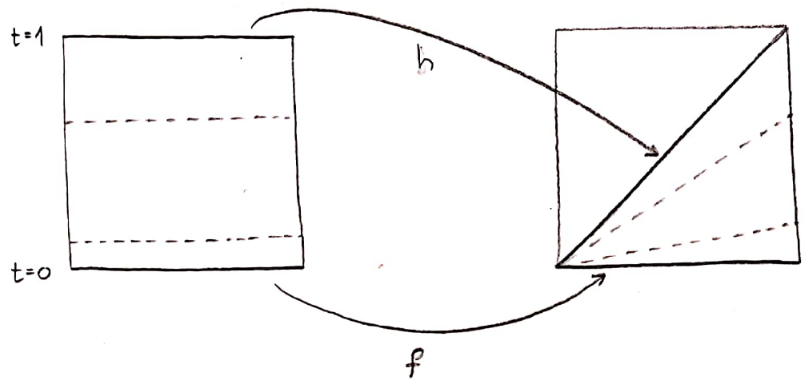
Homotopija od $f$ do $k$ je:

$$H_{fk} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]^2,$$
$$(x,t) \mapsto ((1-t)x, tx).$$

**Zgled 2.** Naj bo $X$ topološki prostor in $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ zvezni preslikavi. Preslikava

$$H(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x)$$

je **premočrtna** homotopija, ki za vsak $x \in X$ s časom prehodi daljico od $f(x)$ do $g(x)$.




Prostor X je **kontraktibilen**, če je identiteta $f : X \to X$, dana s predpisom $f(x) = x$, homotopna konstantni preslikavi $g(x) = c$ za vsak $x \in X$ in nek $c \in X$.
Interval $[0, 1]$ je kontraktibilen, saj obstaja homotopija med identiteto na intervalu in konstantno preslikavo $f(x) = 0$. Zgoraj opisana premočrtna homotopija je dana s predpisom $H(x, t) = (1 - t)x$. Kontrakcija v 0 z istim predpisom deluje za vse konveksne prostore, ki vsebujejo 0.

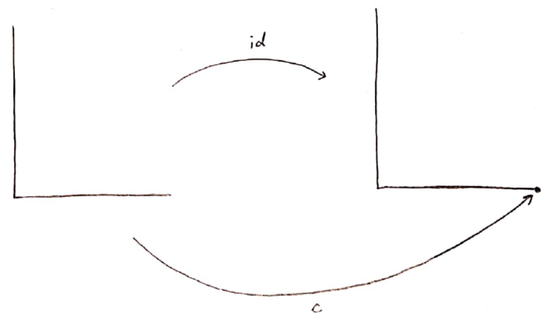
**Zgled 3.** Naj bo $X = [0, 1] \times 0 \cup X = \{0\} \times [0, 1]$. Ali je $X$ kontraktibilen?

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, y); & t \leq \frac{1}{2}, y = 0 \\ (0, (1 - 2t)); & t \leq \frac{1}{2}, y \neq 0 \\ (2(1 - t)(x - 1) + 1, 0); & t > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ta preslikava je res zvezna, saj je elementarna po delih, v $t = \frac{1}{2}$ pa se predpisa ujemata.
Skonstruirali smo homotopijo med identiteto na prostoru $X$ in točko $(1, 0)$, torej je prostor $X$ kontraktibilen. Druga možnost bi bila spet premočrtna homotopija do točke $(0, 0)$.

# 4 Primer diska in krožnice

**Definicija 4.** *Naj bo $X$ topološki prostor in $A \subseteq X$.* ***Retrakcija*** *je zvezna preslikava $r : X \to A$, za katero je $r(x) = x$ za vsak $x \in A$. V tem primeru imenujemo $A$* ***retrakt*** *prostora $X$.*




Za retrakcijo $r : [0, 1] \to \{0\}$ velja $r(x) = 0$ za $\forall x \in [0, 1]$.

**Zgled 4.** Za retrakcijo $r : [0, 2] \to [0, 1]$ velja

$$r(x) = \begin{cases} x; & x \in [0, 1], \\ 2 - x; & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

**Izrek 5.** *Krožnica je retrakt diska natanko tedaj, ko je krožnica kontraktibilna.*

*Dokaz.* Definirajmo krožnico

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| = 1\}$$

in disk

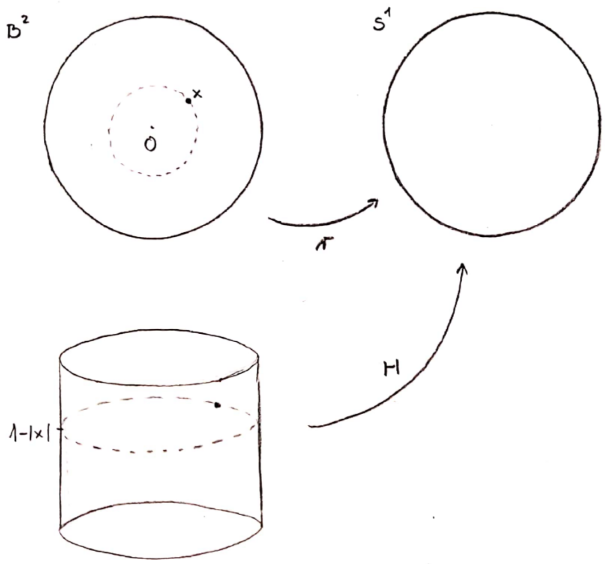
$$B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1\}.$$

Če je krožnica kontraktibilna, obstaja homotopija $H : S^1 \times [0, 1] \to S^1$ in $H(x, 0) = x$ ter $H(x, 1) = C$, kjer naj $C$ predstavlja točko, v katero se bo s homotopijo preslikala krožnica. Retrakcija $r : B^2 \to S^1$, kjer je

$$r : x \mapsto H\left(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|\right),$$

če $x \neq 0$ in $0 \mapsto C$, nam disk preslika na krožnico. Zveznost se prenese s homotopije, v točki 0 pa jo lahko preverimo s pomočjo limit. Točke na skrajnem robu diska se namreč preslikajo same vase, točka v središču pa se slika v $C$.

Poglejmo si še primer, ko vemo, da je krožnica retrakt diska. Vemo, da obstaja taka retrakcija $r : B^2 \to S^1$, da je $r(x) = x$ za vsak $x \in S^1$. Homotopijo




$H : S^1 \times [0,1] \to S^1$, definiramo s predpisom $(x,t) \mapsto r(x(1-t))$, ta pa nam krožnico stisne v točko. Na začetku homotopije se bo vsaka točka preslikala sama vase, ob času 1 pa se bodo vse točke na krožnici slikale v eno točko. Ker je retrakcija zvezna, vemo, da je tudi homotopija $H$ zvezna. Krožnica je torej kontraktibilna. □

Dokazati je možno tudi, da retrakcija diska in kontrakcija krožnice ne obstajata.

# 5 Deformacijski retrakti

**Definicija 5.** *Naj bo $X$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Prostor $A$ je* ***deformacijski retrakt****, če je retrakt z retrakcijo $r$ in obstaja homotopija od identitete na $X$ do retrakcije $r$. Prostor $A$ je* ***krepki deformacijski retrakt****, če je deformacijski retrakt ter točke v $A$ ves čas homotopije mirujejo.*

**Zgled 6.** Naj bo $X = [0,1]^2$ in $A = [0,1] \times \{0\}$. Podprostor $A$ je krepki deformacijski retrakt prostora $X$. Velja namreč $r : (x,y) \mapsto (x,0)$, homotopija $H((x,y),t) = (x,(1-t)y)$ pa zvezno preslika identiteto na $X$ v $A$.

**Zgled 7.** Naj bo

$$X = \{(x,0);\ x \in [0,1]\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left(x, \frac{x}{k}\right);\ x \in [0,1] \right\}$$

in $A = \{(x,0);\ x \in [0,1]\}$. Podprostor $A$ je deformacijski retrakt, vendar ni krepki deformacijski refrakt. Če bi $A$ bil krepki deformacijski retrakt, bi si namreč lahko izbrali neko točko (ki ni $(0,0)$) v $A$, za katero obstaja neka majhna okolica, v kateri je točka, ki ni v $A$. Edina pot od te točke do $A$ pa je preko $(0,0)$, kar pomeni, da bi morala zapustiti to okolico. Preslikava torej ne bi bila zvezna.

# Zaključek

Cilj projekta je bil dokazati ekvivalenco med nekontraktibilnostjo krožnice in neobstojem retrakcije diska na krožnici. S tem namenom smo se seznanili z osnovami topologije ter se ukvarjali s preslikavami. Ukvarjali smo se z zveznostjo, topologijo in retrakti ter spoznali osnove homotopije. Posebej smo izpostavili premočrtno homotopijo, retrakte pa razdelili na šibke in krepke (ter razložili razliko med njima). Svoje znanje smo prav tako uspeli uporabiti za rešitev naše zadane naloge, kjer smo s pomočjo prej omenjenih znanj na primeru diska in krožnice dokazali ekvivalenco med nekontraktibilnostjo krožnice in neobstojem retrakcije diska na krožnici.

# Literatura

[1] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, 2. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2017.

[2] Zapiski s predavanj na Fakulteti za matematiko in fiziko, UL.