Taylorjeva vrsta in π

Avtorji: Patrik Istinič, Nadja Ogrinc, Žan Hafner Petrovski
Mentorica: Jana Vidrih

1 Uvod

Marsovski ljubitelji matematike so od nekdaj iskali odgovore na različna vprašanja. Na matematičnem taboru so dobili nalogo natančno narisati trigonometrično funkcijo. Zagnani Marsovčki pa so se problema lotili s pomočjo polinomov. Naloga je bila zelo zahtevna, a vendar zelo zanimiva zaradi kasneje odkrite vsestranske uporabe Taylorjevih polinomov. Za izvedbo "misije" je bilo potrebno veliko predhodnega znanja polinomov, vrst, zaporedij, odvodov, itegralov, limit, trigonometričnih funkcij itd.[1]

2 Taylorjev polinom

Imamo funkcijo f in točko x_0. Vemo, da se tangenta na graf funkcije f v točki x_0 najbolje prilega grafu. Je namreč edina premica, ki gre skozi točko $(x_0, f(x_0))$ in ima enak naklon kot graf f v točki x_0. Poiščimo sedaj parabolo, ki se najbolje prilega grafu funkcije f v točki x_0. Iščemo torej enačbo parabole, ki gre skozi točko $(x_0, f(x_0))$ in ima enak naklon kot graf funkcije f v točki x_0, to pomeni da imata funkciji enak prvi odvod, hkrati pa zahtevamo da se v tej točki ujemata tudi druga odvoda. Splošni polinom druge stopnje, ki opisuje iskano parabolo, ima formulo

$$p(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2. \tag{1}$$

Računali smo odvode polinoma p pri danem $x = x_0$ in dobili

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p(x_0) = a + b(x_0 - x_0) + c(x_0 - x_0)^2 = a, \\ f'(x_0) &= p(x_0) = b + 2c(x_0 - x_0) = b, \\ f''(x_0) &= p(x_0) = 2c, \end{aligned}$$

[1]Pozor! Pred nadaljnim branjem priporočamo branje vira [1]. O tveganju ali nezaželjenih učinkih se posvetujte z izkušenimi Marsovci ali profesorji!

in smo neznane konstante a, b, c v polinomu p zapisali z odvodi funkcije f. Polinom predstavljen s funkcijo in njenimi odvodi je

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

2.1 Primer

Poglejmo si prejšnjo izpeljavo na primeru funkcije $\cos x$ v točki $x = 0$.

1. Izračunamo prva dva začetna odvoda funkcije $\cos x$ in nato vstavimo vrednost $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \to f(0) = \cos 0 = 1 \\ f'(x) &= -\sin x \to f'(0) = -\sin 0 = 0 \\ f''(x) &= -\cos x \to f''(0) = -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

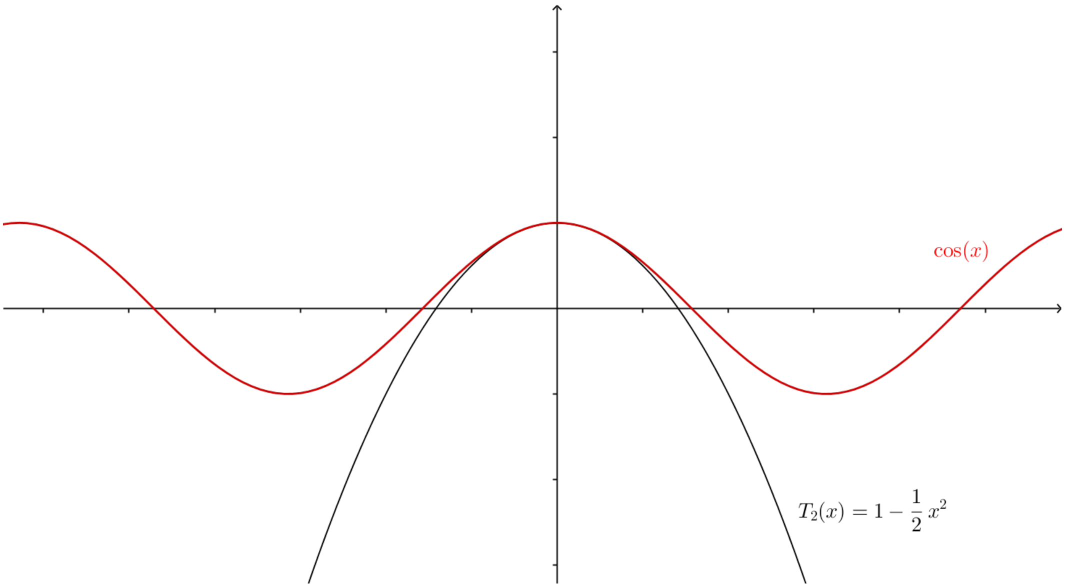
2. Izračunane vrednosti vstavimo v splošni polinom (1) in ga označimo s $T_2(x)$. Izraz uredimo kot

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \\ T_2(x) &= 1 + \frac{0}{1}(x - 0) + (-\frac{1}{2})(x - 0)^2, \\ T_2(x) &= 1 + 0 + (-\frac{1}{2})x^2, \\ T_2(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

3. Dobljeni polinom $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ imenujemo Taylorjev polinom druge stopnje in je polinom, ki se "najbolje"prilega začetni funkciji.

2.2 Notacija

- Produkt prvih n naravnih števil označimo z $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Posebej označimo $0! = 1$.
- Z $f^{(n)}(x)$ označujemo n-ti odvod funkcije $f(x)$, velja $f^{(0)} = f(x)$, $f^{(1)} = f'(x), \ldots$



Slika 1: Graf funkcije $\cos x$ je narisan z rdečo, s črno je narisan $T_2(x)$.

2.3 Taylorjev polinom četrte stopnje

Z enakim postopkom kot zgoraj poizkusimo zapisati še Taylorjev polinom četrte stopnje. Najprej vzemimo splošni polinom četrte stopnje

$$p(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 + e(x - x_0)^4.$$

Želimo, da se odvodi polinoma in funkcije v točki x_0 ujemajo, kar zapišemo takole:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= p(x_0) = a, \\
f'(x_0) &= p'(x_0) = b, \\
f''(x_0) &= p''(x_0) = 2c, \\
f^{(3)}(x_0) &= p^{(3)}(x_0) = 3!\,d = 3 \cdot 2 \cdot 1\,d = 6d, \\
f^{(4)}(x_0) &= p^{(4)}(x_0) = 4!\,e = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\,e = 24e.
\end{aligned}$$

Kot pri prejšnjem primeru iz zgornjih enakosti izrazimo neznane koeficiente a, b, c, d in e z odvodi funkcije f in jih vstavimo v splošno obliko polinoma. Dobimo Taylorjev polinom četrte stopnje v točki x_0, ki je enak

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\
&+ \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.
\end{aligned}$$

2.4 Taylorjev polinom stopnje n

Iz zgornje izpeljave sklepamo, kako izgleda Taylorjev polinom n-te stopnje v točki x_0. Zanj dobimo obliko

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j. \end{aligned}$$

Definicija 1. *Taylorjev polinom stopnje* n v točki x_0 se zapiše kot

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

3 Taylorjeva vrsta

Definicija 2. Vrsto

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots \end{aligned}$$

imenujemo *Taylorjeva vrsta* funkcije f v točki x_0.

4 Taylorjeve vrste elementarnih funkcij

4.1 Sinus in kosinus

Zapišimo Taylorjevo vrsto za funkcijo $\sin(x)$ v točki $x_0 = 0$. Najprej izračunajmo prvih nekaj odvodov

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), \\ f'(x) &= \cos(x), \\ f''(x) &= -\sin(x), \\ f'''(x) &= -\cos(x), \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Zaradi periodičnosti odvodov potrebujemo le prve tri, četrti odvod pa je že enak osnovni funkciji.

Vstavimo za x točko $x_0 = 0$ in zapišimo Taylorjevo vrsto upoštevajoč splošno formulo (2) iz prejšnjega poglavja. Dobimo

$$T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots,$$

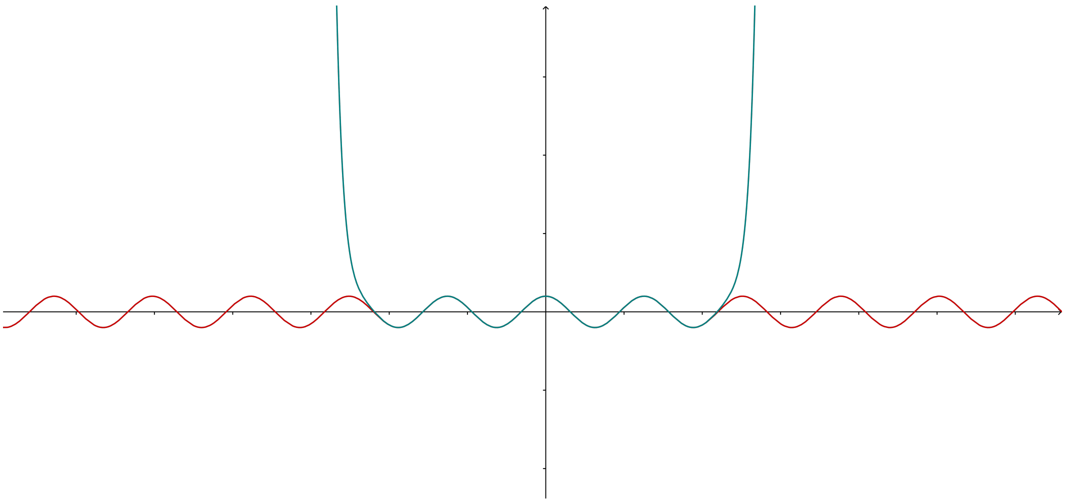
kar je enako

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Na zelo podoben način lahko izpeljemo tudi Taylorjevo formulo za $\cos(x)$, ki je

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Na sliki 2 vidimo, da Taylorjev polinom stopnje 28 v točki 0, že zelo dobro aproksimira funkcijo kosinus na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$.



Slika 2: Graf funkcije $\cos x$ je narisan z rdečo, z modro je narisan $T_{28}(x)$.

4.2 Eksponentna funkcija in naravni logaritem

Za zabavo izpeljimo še Taylorjevo formulo za $f(x) = e^x$ v točki $x_0 = 0$. Kot pri prejšnjem primeru, moramo tudi tu izračunati prvih nekaj odvodov funkcije. Odvajanje nam olajša prikladna lastnost dane funkcije, da je njen odvod kar enak funkciji sami, torej

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz tega sledi, da je vrednost odvodov v $x_0 = 0$ enaka $f^{(n)}(x_0) = e^{x_0}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in tako

$$f^{(n)}(0) = 1.$$

Vrednosti spet vstavimo v Taylorjevo vrsto (2) in dobimo

$$T(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

To lahko strnjeno zapišemo kot

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Zabavo popestrimo še s Taylorjevo vrsto funkcije naravnega logaritma $f(x) = \ln(x)$. Za bralca bo ta vrsta posebej izzivalna, saj zanjo ne ponujamo izpeljave. V naslednjem razdelku pa se lahko pouči o postopku, ki ga lahko uporabi, da dobi željen razvoj

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.$$

5 Kje se skriva π?

S Taylorjevo vrsto je mogoče nastaviti enačbo za izračun pijevih decimalk. Uporabimo funkcijo $f(x) = \arctan(x)$. Izkoristimo lahko dejstvi, da je

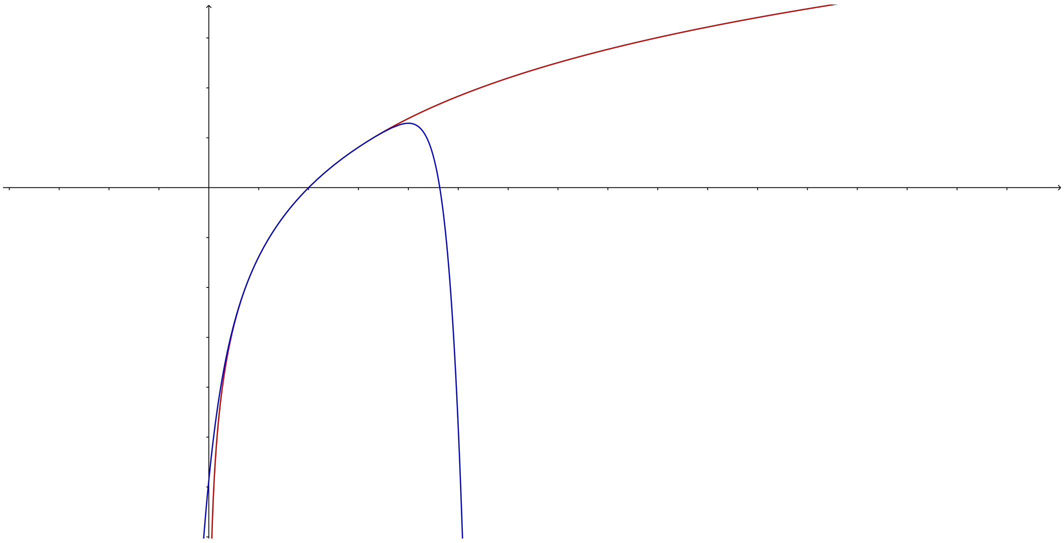
$$\arctan(1) = \pi/4$$

in prvi odvod

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vemo, da je vsota geometrijske vrste za $|q| < 1$ enaka

$$S = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$



Slika 3: Graf funkcije $\ln x$ je narisan z rdečo, z modro je narisan $T_{10}(x)$.

Da za dan primer dobimo pravi q, moramo enačiti

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+x^2}$$

in dobimo

$$q = -x^2.$$

Ko pri vsoti geometrijske vrste za q vstavimo $-x^2$, dobimo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n.$$

Nedoločeni integral te vsote je enak nedoločenemu integralu odvoda $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in po osnovnem izreku infinitezimalnega računa tudi dani funkciji. To pomeni, da velja

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^{2n})dx.$$

Zamenjajmo vsoto in integral[2], pred integral postavimo tudi konstanto $(-1)^n$ in dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int (x^{2n})dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

[2]Da lahko integral in neskončno vsoto v tem primeru res zamenjamo, se lahko bralec prepriča ob posvetovanju z [1].

Sedaj uporabimo dejstvo, da je $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Vstavimo $x = 1$ v zgoraj izračunan integral in dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = \arctan(1) = \pi/4.$$

Vidimo, kje se skriva π:

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right).$$

Literatura

[1] J. Globevnik, M. Brojan *Analiza 1*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2010.

[2] *Taylor Series* [online.] [citirano 19. avgust 2015] Dostopno na spletnem naslovu: `http://www.sosmath.com/calculus/tayser/tayser01/tayser01.html`