Zločin in kazen v baletni dvorani

Avtorji: Tjaša Bajc, Vid Rotvejn Pajič in Martin Molan
Mentorica: Vesna Iršič

1 Uvod

V okrogli baletni dvorani se v popolni temi nahajata ropar in policist. Slednji mu zre v hrbet, vidi le medel obris, a ta je dovolj. Njegova pištola je v pripravljenosti, zdaj ga mora le še opozoriti in mu z baterijo posvetiti v obraz. A hkrati ga prešine, da ne sme izdati svojega položaja, drugače utegne postati nevarno. Naenkrat se spomni, da so stene dvorane prekrite z ogledali. Morda bi lahko posvetil v ogledalo in žarek bi se nato odbil naravnost do roparja, a to porodi nov problem: v katero smer naj posveti, da z enim odbojem svetlobe osvetli roparja?

S podobnim problemom se je soočal že arabski matematik Alhazen okoli leta 1000, ki ga je zastavil in rešil v svoji knjigi Velika Optika. V knjigi je opisal iskanje točke na obodu krožnega zrcala, v kateri se mora odbiti žarek svetlobe, da bo od prve dane točke potoval do druge dane točke. Bolj sodobna formulacija problem postavi na okroglo biljardno mizo, na kateri sta dve žogici. Prvo moramo udariti tako, da po enem odboju zadane drugo.

2 Problem z dvema točkama

Reševali bomo problem iz uvoda, ki ga matematično formaliziramo. Namesto o žogicah in njihovih poteh govorimo o točkah in žarkih, obod okrogle biljardne mize pa predstavimo s krožnico. Dano imamo krožnico s polmerom r, ki jo postavimo v koordinatni sistem tako, da njeno središče S sovpada s koordinatnim izhodiščem. Krožnica je torej podana z enačbo

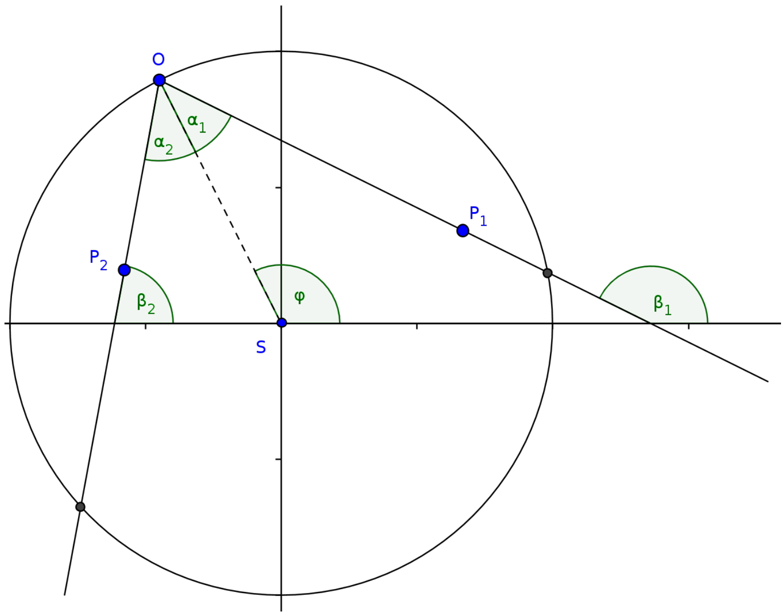
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dani točki, ki predstavljata začetni legi žogic, imata koordinate $P_1(a, b)$ in $P_2(c, d)$. Če vemo, od katere točke na obodu se žarek odbije, poznamo rešitev.

Na začetku bomo obravnavali nekaj posebnih primerov. Če obe točki sovpadata s središčem krožnice, je rešitev neskončno. Ne glede na točko odboja sta vpadni in odbojni kot enaka nič in žogica se vedno vrne v izhodišče, zato so rešitve vse točke na krožnici.

Če ena točka sovpada s središčem, druga pa ne, sta rešitvi dve. To sta presečišči krožnice s premico, ki poteka skozi obe točki. Drugih rešitev ni, ker bi sicer kršili odbojni zakon.

Če točki sovpadata, a nista v središču, sta rešitvi prav tako dve. To sta presečišči krožnice s premico, ki poteka skozi obe točki. Razlog, da ni drugih rešitev, je enak kot prej.



Slika 1: Skica za problem z dvema točkama.

V vseh ostalih primerih velja sledeča izpeljava (koti, ki bodo nastopali v nadaljevanju, bodo neizrojeni). Naj bo $O(x, y)$ rešitvena točka na krožnici. Narišemo kot $\angle P_2OP_1$ in njegova kraka podaljšamo tako, da sekata abscisno os. Narišemo daljico OS, ki je zaradi odbojnega zakona (vpadni kot je enak odbojnemu; kote merimo glede na tangento na krožnico v točki odboja) tudi simetrala kota $\angle P_2OP_1$. Polovici kota $\angle P_2OP_1$ označimo α_1 in α_2 kot na sliki 1. Kota pri presečiščih krakov $\angle P_2OP_1$ z absciso označimo β_1 in β_2. Kot, ki ga daljica OS oklepa z absciso, označimo s φ. Vsota dveh notranjih kotov v trikotniku je enaka suplementu nasproti ležečega kota, zato med koti veljata naslednji zvezi:

$$\alpha_1 = \beta_1 - \varphi,$$

$$\alpha_2 = \varphi - \beta_2.$$

Iz adicijskega izreka za tangens $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ in enakosti $\alpha_1 = \alpha_2$ sledi

$$\frac{\tan\beta_1 - \tan\varphi}{1 + \tan\beta_1\tan\varphi} = \tan\alpha_1 = \tan\alpha_2 = \frac{\tan\varphi - \tan\beta_2}{1 + \tan\varphi\tan\beta_2}. \tag{1}$$

Nosilke krakov kota $\angle P_2OP_1$ in daljice OS so linearne funkcije z enačbo oblike $y = kx + n$ za katere velja, da je tangens naklonskega kota enak smernemu koeficientu k. Iz tega sledi

$$\tan\beta_1 = \frac{y-b}{x-a}, \quad \tan\beta_2 = \frac{y-d}{x-c} \quad \text{in} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

Dobljene vrednosti vstavimo v enačbo (1) in dobimo

$$\frac{\frac{y}{x} - \frac{y-d}{x-c}}{1 + \frac{(y-d)}{(x-c)}\frac{y}{x}} = \frac{\frac{y-b}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{(y-b)}{(x-a)}\frac{y}{x}}.$$

Enačbo križno pomnožimo in jo poenostavimo v

$$(bc + ad)(y^2 - x^2) + 2xy(ac - bd) + (x^2 + y^2)(x(d + b) - y(c + a)) = 0.$$

Ker točka O leži na krožnici, velja $x^2 + y^2 = r^2$, iz česar sledi

$$(bc + ad)(y^2 - x^2) + 2xy(ac - bd) + r^2(x(d + b) - y(c + a)) = 0. \tag{2}$$

Enačba $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, kjer A, B in C niso hkrati nič, predstavlja splošno stožnico. Njena diskriminanta $\delta = B^2 - 4AC$ določi vrsto stožnice:

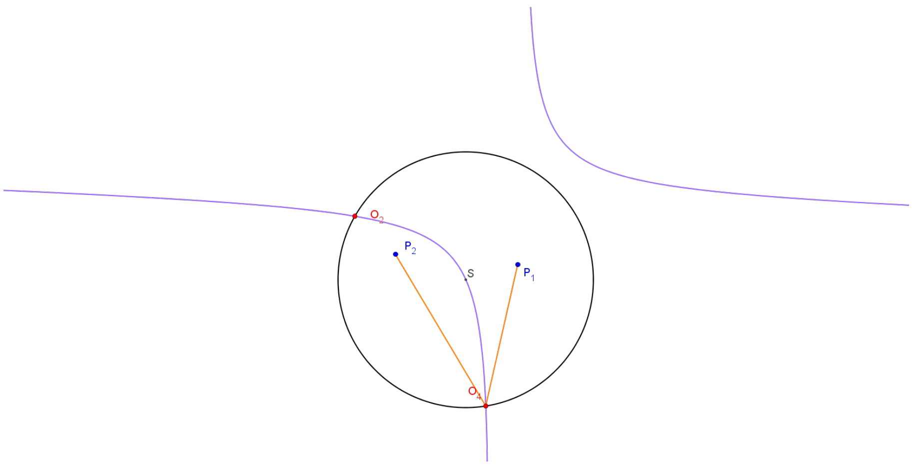
- če je $\delta < 0$, dobimo elipso,
- če je $\delta = 0$, dobimo parabolo,
- če je $\delta > 0$, dobimo hiperbolo.

V našem primeru izračunamo

$$\delta = (2(ac - bd))^2 + 4(bc + ad)^2 \geq 0,$$

pri čemer z obravnavo nekaj preprostih primerov ugotovimo, da $\delta \neq 0$. Torej enačba (2) podaja hiperbolo, rešitve pa so presečišča le-te s krožnico. Ker se krožnica in hiperbola sekata v največ štirih točkah, dobimo največ toliko rešitev. Njihovo število je odvisno od koordinat točk P_1 in P_2.

Opazimo, da središče krožnice $S(0, 0)$ vedno leži na hiperboli, torej gotovo imamo vsaj dve presečišči. Primere rešitev vidimo na slikah 2 in 3. Pri različnih začetnih legah točk P_1 in P_2 torej dobimo dve, tri (če je en krak hiperbole tangenten na krožnico), štiri ali v posebnem primeru neskončno rešitev.



Slika 2: Skica z dvema rešitvama in eno izmed možnih poti žogic.

3 Problem z eno točko

Oglejmo si še nekoliko drugačen problem. Na okrogli biljardni mizi se nahaja ena žogica. Zanima nas, kako naj sunemo žogico, da se po dveh odbojih vrne na svoje izhodišče.

Problem spet formaliziramo in se ukvarjamo s točkami, žarki in krožnico. Znotraj dane krožnice s središčem A je dana točka B. Rešitveni točki na obodu krožnice, na katerih se žarek odbije, označimo z D in E.

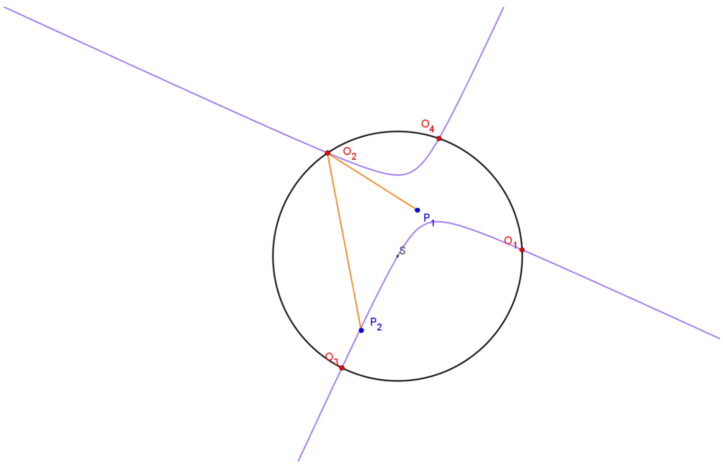
Zaradi odbojnega zakona (vpadni kot mora biti enak odbojnemu) velja, da je premica, ki poteka skozi točki A in E, simetrala kota $\angle DEB$. Enako velja, da je premica, ki poteka skozi točki A in D, simetrala kota $\angle BDE$. Točka C naj bo presečišče premice skozi A in B ter nosilke daljice ED. Ker je trikotnik $\triangle AED$ enakokrak z vrhom v A, je $\triangle BED$ enakokrak z vrhom v B in kot $\angle ACE = \angle BCE = \frac{\pi}{2}$ ter $|CE| = |CD|$. Premica skozi B in A je namreč ravno višina obeh enakokrakih trikotnikov. Za trikotnika $\triangle ECB$ in $\triangle DBC$ velja: stranica BC je skupna obema trikotnikoma, stranici CE in CD sta skladni, kota $\angle BCE$ in $\angle DCB$ sta skladna. Ker se torej trikotnika ujemata v dveh stranicah in kotu med njima, sta skladna. Zaradi simetrije lahko torej podrobneje obravnavamo le enega od obeh trikotnikov (odbojev).

Spomnimo se sinusnega izreka, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju.

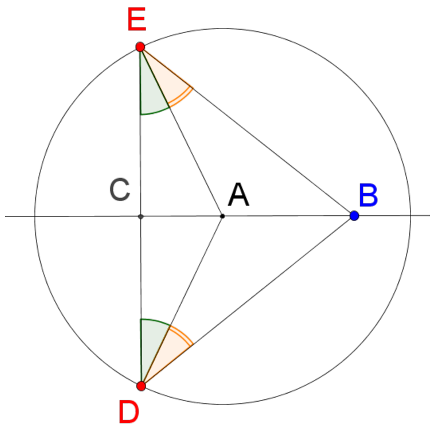
Izrek 1 (Sinusni izrek)**.** *Dan je trikotnik $\triangle ABC$, v katerem kote označimo α, β in γ. Velja:*

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma}.$$

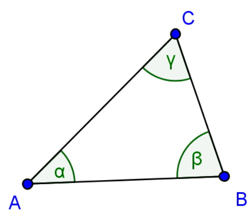
S pomočjo sinusnega izreka dokažemo izrek o simetrali kota.



Slika 3: Skica s štirimi rešitvami in eno izmed možnih poti žogic.



Slika 4: Skica za problem z eno točko.

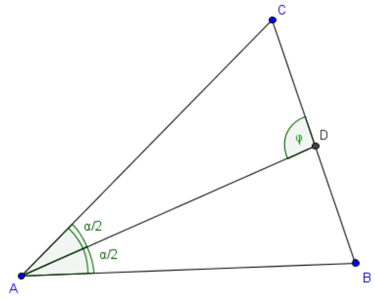


Slika 5: Skica za sinusni izrek.

Izrek 2 (Izrek o simetrali kota)**.** *V trikotniku* $\triangle ABC$*, kjer presečišče sime-*

trale kota pri A in nosilke daljice BC označimo z D, velja

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|}.$$



Slika 6: Skica za izrek o simetrali kota.

Dokaz. V trikotniku $\triangle ABC$ kot pri A označimo z α in kot $\angle CDA$ s φ. Za trikotnika $\triangle ADC$ in $\triangle ABD$ velja sinusni izrek, zato je

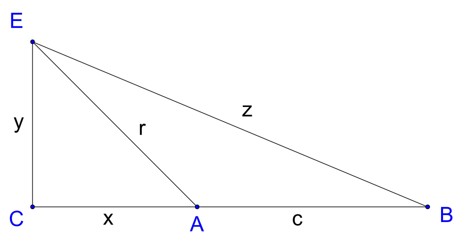
$$\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|AC|}{|CD|} \quad \text{in} \quad \frac{\sin(\pi-\varphi)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|AB|}{|BD|}.$$

Ker velja $\sin\varphi = \sin(\pi-\varphi)$, sledi $\dfrac{|AC|}{|CD|} = \dfrac{|AB|}{|BD|}$. □

Vrnimo se k problemu z eno točko in sliki 3. V nadaljevanju bomo dolžine označili z

$$|EC| = y,\ |BE| = z,\ |AB| = c,\ |AE| = r \text{ in } |CA| = x.$$

Slika 7: Skica z oznakami.



Iz izreka o simetrali kota sledi

$$\frac{z}{y} = \frac{c}{x}.$$

Ker je trikotnik pravokoten, zanj velja Pitagorov izrek. Z njegovo uporabo dobimo enačbi

$$y^2 + (x+c)^2 = z^2 \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Eliminiramo y in z in dobimo

$$r^2x^2 - r^2c^2 + 2cx^3 + 2c^2x^2 = 0$$

$$(x+c)(r^2(x-c) + 2cx^2) = 0.$$

Ker x in c predstavljata dolžini, je člen $(x+c)$ vedno strogo večji od nič. Zgornja enačba torej predstavlja kvadratno enačbo v spremenljivki x, ki jo preoblikujemo v

$$2cx^2 + r^2x - r^2c = 0.$$

Rešitvi enačbe sta:

$$x_1 = \frac{-r^2 - r\sqrt{r^2+8c^2}}{4c} \quad \text{in} \quad x_2 = \frac{-r^2 + r\sqrt{r^2+8c^2}}{4c}.$$

Rešitev x_1 je vedno negativna, saj je člen $r\sqrt{r^2+8c^2}$ večji od nič. Ker iskana rešitev predstavlja dolžino, lahko rešitev x_1 izločimo. Tako dobimo samo eno rešitev in sicer:

$$x = \frac{-r^2 + r\sqrt{r^2+8c^2}}{4c}, \; c \neq 0.$$

Ta rešitev je vedno pozitivna, saj je $\sqrt{r^2+8c^2} > r$. Rešitev je veljavna, če je $c \neq 0$. Spomnimo se, da je c razdalja med začetno točko in središčem krožnice. Če je $c = 0$, je začetna točka v izhodišču. V tem primeru je rešitev neskončno; kamorkoli udarimo žogico, se po dveh odbojih vrne v izhodišče.

Literatura

[1] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications Inc., New York, 1965.

[2] *Alhazen*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 17. 8. 2015], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Alhazen`.

[3] *Conic section*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 18. 8. 2015], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Conic_section#Cartesian_coordinates`.