Naslov

ENAČBE IN NAPOVEDOVANJE PRIHODNOSTI

Pavle Saksida, Oddelek za matematiko
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

MARS,
Javorniški Rovt, 2016

Načrt predavanja

- Uvod
- Deterministično napovedovanje in diferenčne enačbe
- Harmonično nihalo
- Verjetnostno napovedovanje

Uvod

Od nekdaj si je človek prizadeval napovedati bližnjo in bolj daljno prihodnost. Napovedovanje prihodnosti je precej praktična dejavnost, potrebna za preživetje.

- Lovec poskuša uganiti, kako se bo vedla žival, ki jo lovi.
- Ljudje so se morali vnaprej pripraviti na zimo, če so hoteli preživeti v hladnem podnebju. Zato so morali prihod zime pravočasno predvideti.
- Egipčani so znali zelo natančno napovedati poplavljanje Nila.
- ...

Precej očitno je, da znajo tudi druga živa bitja napovedovati nekatere dogodke v prihodnosti.

Načeloma velja: Bolje ko znamo napovedati prohodnost, bolj varno je naše življenje. Seveda pa nas pri naporih napovedovanja žene tudi radovednost, želja po ekonomskem dobičku ("pohlep")....

- Ljudje poskušajo ugotoviti, kaj se bo v prihodnosti dogajalo z našim planetom, z našim osončjem, z vesoljem...
- Ljudje poskušajo ugotoviti, kako se bodo gibale cene različnih dobrin na različnih trgih - od surovin, do delnic, obveznic in njihovih derivatov.

Načini napovedovanja prihodnosti:

Najstarejši racionalen način napovedovanja je verjetno opazovanje ponavljajočih se (periodičnih) pojavov.

- Menjavanje letnih časov.
- Gibanje Sonca, Lune in zvezd na nebu.
- Ciklično poplavljanje nekaterih rek - npr. Nila.
- Plima in oseka.

Obstaja veliko neracionalnih načinov napovedovanja prihodnosti: horoskopi, prerokovanja, napovedi katastrof... . Metode teh dejavnosti so sicer morda vprašljive, vendar si zadajajo zelo težko nalogo: poskušajo napovedati dogodke, ki se ne ponavljajo ciklično.

Očitno je naslednje:
Ponavljajoče se (periodične) dogodke je laže napovedovati, kot tiste, ki se ne ponavljajo.

V zgodovini je bil osrednji problem pri napovedovanji ponavljajočih se dogodkov merjenje časa. Ko enkrat znamo dobro meriti čas, napovedovanje cikličnih dogodkov ni več tako težko. Napovedovanje dogodkov, ki se ne ponavljajo (izjemnih dogodkov) pa ostaja težka naloga.

Zanimivo je, da nekatere živali dobro napovedujejo nekatere izjemne dogodke - npr. zelo hude zime, hude suše, morda tudi potrese, ... Kako jim to uspeva, ne vemo.

Racionalistični prostop k napovedovanju prihodnosti

Objekt, ki mu hočemo napovedati prihodnost, imenujemo sistem. Beseda sistem pomeni celota, sestavljena iz več delov; grško - $\sigma\upsilon\sigma\tau\eta\mu\alpha$, systema.

Primeri: harmonično nihalo, ravninsko nihalo, naše osončje in drugi planetni sistemi, atomi v kosu neke snovi, populacija bakterij v petrijevki, atmosfera (vreme), množica vseh delnic na neki borzi, vesoljsko plovilo na poti med Zemljo in Marsom, ..., celotno vesolje.

Vsak sistem se lahko nahaja v različnih stanjih. Množica vseh možnih stanj sistema se imenuje fazni prostor. Stanja opisujemo s številskimi parametri - opazljivkami. Opazljivke so realne funkcije na faznem prostoru.

Primeri:

- bakterije v petrijevki - število bakterij.
- harmonično nihalo - odmik od mirovne lege in trenutna hitrost nihala
- ravninsko nihalo - kot med nihalom in navpičnico in kotna hitrost.

Različne znanosti se ukvarjajo z naslednjim problemom:

Kako iz preteklih stanj nekega sistema ugotoviti stanja v prihodnosti?

Čas (časovno premico) razdelimo na enake intervale α $(\ldots, \frac{1}{10}s, 1s, 10s, \ldots)$. Izberimo si torej neko tako časovno enoto α. Naš sistem bomo opazovali v časih

$$0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots .$$

Označimo stanje našega sistema v času $n\alpha$ z $x(n)$. Pri tem je

$$x(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)),$$

pri čemer so $x_1, x_2, \ldots, x_N$ opazljivke našega sistema. Z vrednostmi vseh N opazljivk, je stanje popolnoma določeno.

Pravimo, da se sistem vede deterministično, če obstaja taka funkcija F, odvisna od $k+1$ spremenljivk, da za vsak n velja

$$x(n) = F(n, x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-k)).$$

Denimo, da poznamo funkcijo F in prvih k stanj sistema, $x(0), x(1), \ldots, x(k-1)$. Potem lahko izračunamo stanje sistema $x(n)$ v poljubnem prihodnjem času n.

Res:

$$\begin{array}{rcl} x(k) & = & F(k, x(k-1), x(k-2), \ldots, x(1), x(0)) \\ x(k+1) & = & F(k+1, x(k), x(k-1), \ldots, x(2), x(1)) \\ x(k+2) & = & F(k+2, x(k+1), x(k), \ldots, x(3), x(2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x(n) & = & F(n, x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-k+1), x(n-k)). \end{array}$$

Bakterije v petrijevki

Oglejmo si zelo enostaven, pa vendar zelo pomemben primer. Naj bo naš sistem populacija bakterij v zelo veliki petrijevki z dovolj hrane, naj bo $\alpha = 5\, min$, $x(0)$ število bakterij na začetku merjenja časa in $x(n)$ število bakterij v času $n \times 5$ minut po začetku merjenja časa.
Zakon naravne rasti pravi, da za primerno pozitivno realo število κ velja

$$x(n) = \kappa\, x(n-1), \quad \text{za vsak } n. \tag{1}$$

V tem primeru je torej funkcija F podana z enostavnim predpisom

$$F(n, x(n-1), \ldots, x(n-k)) = \kappa\, x(n-1).$$

Odvisna je le od ene spremenjlivke, t. j. od stanja v enem preteklem času. Eksplicitno je od časa neodvisna.

Enačbo (1) lahko iteriramo. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Tedaj

$$\begin{aligned}
x(1) &= \kappa\, x(0) \\
x(2) &= \kappa\, x(1) = \kappa \cdot \kappa\, x(0) = \kappa^2 x(0) \\
x(3) &= \kappa\, x(2) = \kappa \cdot \kappa^2 x(0) = \kappa^3 x(0) \\
x(4) &= \kappa\, x(3) = \kappa \cdot \kappa^3 x(0) = \kappa^4 x(0) \\
\vdots \;&\;\vdots\; \vdots \\
x(n) &= \kappa x(n-1) = \kappa \cdot \kappa^{n-1} x(0) = \kappa^n x(0).
\end{aligned}$$

Enačbo (1) lahko iteriramo. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Tedaj

$$\begin{aligned}
x(1) &= \kappa\, x(0)\\
x(2) &= \kappa\, x(1) = \kappa \cdot \kappa\, x(0) = \kappa^2 x(0)\\
x(3) &= \kappa\, x(2) = \kappa \cdot \kappa^2 x(0) = \kappa^3 x(0)\\
x(4) &= \kappa\, x(3) = \kappa \cdot \kappa^3 x(0) = \kappa^4 x(0)\\
\vdots \;\; & \vdots \;\; \vdots\\
x(n) &= \kappa x(n-1) = \kappa \cdot \kappa^{n-1} x(0) = \kappa^n x(0).
\end{aligned}$$

Ugotovili smo torej: Če je v petrijevki v začetnem času $x(0)$ bakterij, jih je po $n \times 5$ minutah

$$x(n) = \kappa^n x(0).$$

Z drugimi besedami, rešitev enačbe (1) pri začetnem pogoju $x(0) = x_0$ je

$$x(n) = \kappa^n x_0.$$

Deterministično napovedovanje in diferenčne enačbe

Enačba (1) je najpreprostejši primer diferenčne enačbe.

Deterministično napovedovanje in diferenčne enačbe

Enačba (1) je najpreprostejši primer diferenčne enačbe.

Splošna linearna diferenčna enačba drugega reda je enačba oblike

$$x(n) = -p(n)x(n-1) - q(n)x(n-2)$$

Pri tem sta

$$p(n), q(n) \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dve funkciji na množici naravnih števil z vrednostmi v realnih številih. Takim funkcijam pravimo tudi zaporedja. Tudi iskana funkcija $n \mapsto x(n)$ je zaporedje.

Deterministično napovedovanje in diferenčne enačbe

Enačba (1) je najpreprostejši primer diferenčne enačbe.

Splošna linearna diferenčna enačba drugega reda je enačba oblike

$$x(n) = -p(n)x(n-1) - q(n)x(n-2)$$

Pri tem sta

$$p(n), q(n) \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dve funkciji na množici naravnih števil z vrednostmi v realnih številih. Takim funkcijam pravimo tudi zaporedja. Tudi iskana funkcija $n \mapsto x(n)$ je zaporedje.
Eksplicitno (neiterativno) reševanje zgornje enačbe pri poljubni izbiri funkcij $p(n)$ in $q(n)$ je zelo težak in nerešen problem. Zato se bomo omejili na primer, ko sta $p(n)$ in $q(n)$ konstantni funkciji. Reševali bomo torej enačbo

$$x(n) = -p\,x(n-1) - q\,x(n-2) \tag{2}$$

Videli smo, da je rešitev enačbe naravne rasti

$$x(n) = \kappa\, x(n-1)$$

eksponentna funkcija

$$x(n) = a\,\kappa^n,$$

kjer je a poljubno realno število. (Velja $x(0) = a$.) Enačba naravne rasti je poseben primer ($p = -\kappa$, $q = 0$) enačbe (2), ki jo imenujemo linearna diferenčna enačba drugega reda **s konstantnimi koeficienti**.

Videli smo, da je rešitev enačbe naravne rasti

$$x(n) = \kappa\, x(n-1)$$

eksponentna funkcija

$$x(n) = a\, \kappa^n,$$

kjer je a poljubno realno število. (Velja $x(0) = a$.) Enačba naravne rasti je poseben primer ($p = -\kappa$, $q = 0$) enačbe (2), ki jo imenujemo linearna diferenčna enačba drugega reda **s konstantnimi koeficienti**.

Ugibajmo: Morda pa je kaka eksponentna funkcija tudi rešitev enačbe (2). Denimo torej, da je kakšna rešitev (2) oblike

$$\widetilde{x}(n) = b \cdot \lambda^n,$$

kjer sta b in λ neki, za zdaj še neznani, števili.

Če je $\widetilde{x}(n)$ rešitev, mora seveda veljati

$$\widetilde{x}(n) = -p\,\widetilde{x}(n-1) - q\,\widetilde{x}(n-2)$$

za vsak n. Torej mora za vsak n veljati

$$b \cdot \lambda^n = -p\,b \cdot \lambda^{n-1} - q\,b \cdot \lambda^{n-2}.$$

Če je $\widetilde{x}(n)$ rešitev, mora seveda veljati

$$\widetilde{x}(n) = -p\,\widetilde{x}(n-1) - q\,\widetilde{x}(n-2)$$

za vsak n. Torej mora za vsak n veljati

$$b \cdot \lambda^n = -p\,b \cdot \lambda^{n-1} - q\,b \cdot \lambda^{n-2}.$$

Krajšamo z b in pospravimo vse skupaj na levo stran:

$$\lambda^n + p\,\lambda^{n-1} + q\,\lambda^{n-2} = 0. \tag{3}$$

Krajšamo še z λ^{n-2} in dobimo

$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = 0.$$

Če je $\widetilde{x}(n)$ rešitev, mora seveda veljati

$$\widetilde{x}(n) = -p\,\widetilde{x}(n-1) - q\,\widetilde{x}(n-2)$$

za vsak n. Torej mora za vsak n veljati

$$b \cdot \lambda^n = -p\,b \cdot \lambda^{n-1} - q\,b \cdot \lambda^{n-2}.$$

Krajšamo z b in pospravimo vse skupaj na levo stran:

$$\lambda^n + p\,\lambda^{n-1} + q\,\lambda^{n-2} = 0. \tag{3}$$

Krajšamo še z λ^{n-2} in dobimo

$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = 0.$$

Takoj vidimo: Če je λ_0 ničla polinoma $\lambda^2 + p\,\lambda + q$, potem je

$$x(n) = b \cdot \lambda_0^n$$

rešitev enačbe (2) za vsako število b.

Enačba (3) se imenuje karakteristična enačba diferenčne enačbe (2) in ima seveda dve (morda kompeksni) ničli.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Torej sta funkciji

$$x_1(n) = b_1 \lambda_1^n, \quad \text{in} \quad x_2(n) = b_2 \lambda_2^n$$

rešitvi (2) pri poljubni izbiri števil b_1 in b_2.

Trditev:

Naj bosta $x_1(n)$ in $x_2(n)$ dve rešitvi diferenčne enačbe

$$x(n) + p\,x(n-1) + q\,x(n-2) = 0$$

in naj bosta b_1 in b_2 dve poljubni realni števili. Potem je tudi funkcija

$$y(n) = b_1 \cdot x_1(n) + b_2 \cdot x_2(n)$$

rešitev te enačbe.

Trditev:

Naj bosta $x_1(n)$ in $x_2(n)$ dve rešitvi diferenčne enačbe

$$x(n) + p\,x(n-1) + q\,x(n-2) = 0$$

in naj bosta b_1 in b_2 dve poljubni realni števili. Potem je tudi funkcija

$$y(n) = b_1 \cdot x_1(n) + b_2 \cdot x_2(n)$$

rešitev te enačbe.

Dokaz: Vstavimo $y(n)$ v enačbo in računamo:

$$\begin{aligned} y(n) + p\,y(n-1) + q\,y(n-2) &= \\ b_1\Big(x_1(n) + px_1(n-1) + qx_1(n-2)\Big) &+ \\ b_2\Big(x_2(n) + px_2(n-1) + qx_2(n-2)\Big) \end{aligned}$$

Ker sta $x_1(n)$ in $x_2(n)$ rešitvi, sta druga in tretja vrstica enaki 0, torej je tudi prva vrstica enaka 0, to pa pomeni, da je $y(n)$ tudi rešitev naše enačbe.

Ker sta $x_1(n)$ in $x_2(n)$ rešitvi, sta druga in tretja vrstica enaki 0, torej je tudi prva vrstica enaka 0, to pa pomeni, da je $y(n)$ tudi rešitev naše enačbe.

Oglejmo si preslikavo V iz ravnine $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2); a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ v množico vseh rešitev enačbe (2), podano s predpisom

$$V\Big((a_1, a_2)\Big) = a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)$$

Lahko je videti, da za to preslikavo velja

$$\begin{aligned} V\Big((a_1, a_2) + (b_1, b_2)\Big) &= V\Big((a_1, a_2)\Big) + V\Big((b_1, b_2)\Big) \\ V\Big(\alpha(a_1, a_2)\Big) &= \alpha V\Big((a_1, a_2)\Big) \end{aligned}$$

Ker sta $x_1(n)$ in $x_2(n)$ rešitvi, sta druga in tretja vrstica enaki 0, torej je tudi prva vrstica enaka 0, to pa pomeni, da je $y(n)$ tudi rešitev naše enačbe.

Oglejmo si preslikavo V iz ravnine $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2); a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ v množico vseh rešitev enačbe (2), podano s predpisom

$$V\Big((a_1, a_2)\Big) = a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)$$

Lahko je videti, da za to preslikavo velja

$$\begin{aligned} V\Big((a_1, a_2) + (b_1, b_2)\Big) &= V\Big((a_1, a_2)\Big) + V\Big((b_1, b_2)\Big) \\ V\Big(\alpha(a_1, a_2)\Big) &= \alpha V\Big((a_1, a_2)\Big) \end{aligned}$$

Preslikave z zgornjima lastnostma se imenujejo linearne preslikave. Lahko si predstavljamo, da vse rešitve enačbe (2) tvorijo kopijo ravnine v množici vseh zaporedij $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Harmonično nihalo

Harmonično nihalo je točkasto telo, ki se giblje po premici pod vplivom sile, ki to telo privlači k izhodišču premice in katere velikost je sorazmerna z oddaljenostjo telesa od izhodišča.

Harmonično nihalo

Harmonično nihalo je točkasto telo, ki se giblje po premici pod vplivom sile, ki to telo privlači k izhodišču premice in katere velikost je sorazmerna z oddaljenostjo telesa od izhodišča.

Spomnimo se drugega Newtonovega zakona, ki pravi: Pospešek telesa je enak produktu sile, ki nanj deluje in njegove mase. Naj bo $x(t)$ lega našega nihala v času t, in naj bo m njegova masa. Za lego $x(t)$ po Newtonovem zakonu torej velja

$$x''(t) = -\kappa\, x(t), \tag{4}$$

kjer je κ neko pozitivno število, podano z velikostjo sile. Denimo, da poznamo začetno stanje našega harmoničnega nihala. Napovedali bi radi njegovo prihodnost. Radi bi torej poznali funkcijo $x(t)$ za vse čase $t > 0$.

Enačba (4) na prejšnji strani je diferencialna enačba. Teh zaenkrat še ne znamo reševati. Poskusimo si raje pomagati s kako primerno diferenčno enačbo.

Enačba (4) na prejšnji strani je diferencialna enačba. Teh zaenkrat še ne znamo reševati. Poskusimo si raje pomagati s kako primerno diferenčno enačbo.

Spomnimo se definicije odvoda funkcije:

$$x'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

To pomeni: če je h zelo majhen, potem velja

$$x'(t_0) \cong \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

Spomnimo se, da smo na začetku časovno premico razdelili na enake intervale dolžine α. Stanje sistema v času $n\alpha$ smo označili z $x(n)$. Naj bo $x_z(t)$ zvezna funkcija realne spremenljivke, za katero velja

$$x_z(n\alpha) = x(n), \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}$$

Če je α zelo majhen, imamo

$$x_z'(n\alpha) \cong \frac{x_z(n\alpha + \alpha) - x_z(n\alpha)}{\alpha} = \frac{x(n+1) - x(n)}{\alpha}$$

Odvod funkcije $x_z(t)$ lahko torej nadomestimo z diferenco, t. j. z izrazom

$$D(x)(n) = \frac{1}{\alpha}\Big(x(n+1) - x(n)\Big)$$

ne da bi pri tem zagrešili preveliko napako.

Če je α zelo majhen, imamo

$$x_z'(n\alpha) \cong \frac{x_z(n\alpha + \alpha) - x_z(n\alpha)}{\alpha} = \frac{x(n+1) - x(n)}{\alpha}$$

Odvod funkcije $x_z(t)$ lahko torej nadomestimo z diferenco, t. j. z izrazom

$$D(x)(n) = \frac{1}{\alpha}\Big(x(n+1) - x(n)\Big)$$

ne da bi pri tem zagrešili preveliko napako.

Drugi odvod je odvod odvoda. Zato ga bomo nadomestili z diferenco diferenc.

$$\begin{aligned} D^2(x)(n) &= D\Big(D(x)(n)\Big)(n) = D\Big(\frac{1}{\alpha}(x(n+1) - x(n)\Big)(n) \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\Big(x(n+2) - 2\,x(n+1) + x(n)\Big). \end{aligned}$$

Brez škode lahko zgornjo definicijo druge diference zamenjamo s tole

$$D^2(x) = \frac{1}{\alpha^2}\Big(x(n+1) - 2\,x(n) + x(n-1)\Big),$$

ki je nekoliko bolj "simetrična".

Brez škode lahko zgornjo definicijo druge diference zamenjamo s tole

$$D^2(x) = \frac{1}{\alpha^2}\Big(x(n+1) - 2\,x(n) + x(n-1)\Big),$$

ki je nekoliko bolj "simetrična".

Diferencialno enačbo nihala (4) lahko nadomestimo z diferenčno enačbo

$$D^2(x)(n) = -\kappa\, x(n)$$

Brez škode lahko zgornjo definicijo druge diference zamenjamo s tole

$$D^2(x) = \frac{1}{\alpha^2}\Big(x(n+1) - 2\,x(n) + x(n-1)\Big),$$

ki je nekoliko bolj "simetrična".

Diferencialno enačbo nihala (4) lahko nadomestimo z diferenčno enačbo

$$D^2(x)(n) = -\kappa\,x(n)$$

Izpisana na dolgo se ta enačba glasi

$$\frac{1}{\alpha^2}\Big(x(n+1) - 2\,x(n) + x(n-1)\Big) = -\kappa\,x(n)$$

oziroma

$$x(n+1) - (2 - \alpha^2\kappa)\,x(n) + x(n-1) = 0$$

Prepišimo enačbo spet v obliki

$$x(n+2) = (2 - \alpha^2\kappa)\,x(n+1) - x(n)$$

Opazimo: Vrednost funkcije $x(n)$ bomo lahko iterativno izračunali za vsak $n \in \mathbb{N}$, če le poznamo začetni vrednostivrednosti $x(0)$ in $x(1)$. Torej, če poznamo legi našega nihala v časih 0 in 1, lahko izračunamo lego nihala v vsakem prihodnjem času.

Naj bo torej

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1$$

Tedaj

$$\begin{aligned}
x(2) &= (2 - \alpha^2\kappa)\,x_1 - x_0 \\
x(3) &= (2 - \alpha^2\kappa)\,x(2) - x_1 = (2 - \alpha^2\kappa)\Big((2 - \alpha^2\kappa)\,x_1 - x_0\Big) - x_1 \\
x(4) &= (2 - \alpha^2\kappa)\Big((2 - \alpha^2\kappa)\,x_1 - x_0\Big) - x_1 - (2 - \alpha^2\kappa)\,x_1 - x_0 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Označimo

$$A = (2 - \alpha^2 \kappa)$$

V zgornjih izrazih odpravimo oklepaje in dobimo

$$\begin{aligned}
x(2) &= Ax_1 - x_0 \\
x(3) &= A^2 x_1 - x_1 - Ax_0 \\
x(4) &= A^3 x_1 - 2Ax_1 - A^2 x_0 + x_0 \\
x(5) &= A^4 x_1 - 3A^2 x_1 + x_1 - A^3 x_0 - 2Ax_0 \\
x(6) &= A^5 x_1 - 4A^3 x_1 + 3Ax_1 - A^4 x_0 + 3A^2 x_0 - x_0 \\
\vdots &\;\vdots\; \vdots
\end{aligned}$$

Na ta način lahko torej izračunamo lego našega nihala za poljuben čas v prihodnosti. Vendar je s tem računanjem nekaj dela. Z izračun $x(10.000)$ bi (brez računalnika) potrebovali kar precej časa. Kvalitetno napovedovanje prihodnosti je tako, da lahko enako hitro izračunamo lego $x(10)$ in $x(10.000)$.

Ta cilj lahko dosežemo le, če znamo enačbo analitično (eksplicitno) rešiti.

Ta cilj lahko dosežemo le, če znamo enačbo analitično (eksplicitno) rešiti.

Enačba

$$x(n+1) - (2 - \alpha^2\kappa)\,x(n) + x(n-1) = 0$$

ima znano obliko linearne diferenčne enačbe s konstantnimi keoficienti, torej jo znamo rešiti.

Ta cilj lahko dosežemo le, če znamo enačbo analitično (eksplicitno) rešiti.

Enačba

$$x(n+1) - (2-\alpha^2\kappa)\,x(n) + x(n-1) = 0$$

ima znano obliko linearne diferenčne enačbe s konstantnimi keoficienti, torej jo znamo rešiti.

Spomnimo se: Osnovni rešitvi sta oblike $x(n) = b \cdot \lambda^n$, kjer je b poljuben, λ pa je rešitev karakteristične enačbe

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{(2-\alpha^2 k) \pm \sqrt{(2-\alpha^2 k)^2 - 4}}{2} \\
&= (1 - \frac{\alpha^2 k}{2}) \pm \sqrt{-\alpha^2 k + (\frac{\alpha^2 k}{2})^2} \\
&= (1 - \frac{\alpha^2 k}{2}) \pm i\sqrt{\alpha^2 k - (\frac{\alpha^2 k}{2})^2}
\end{aligned}$$

Vsaka rešitev naše enačbe je oblike

$$x(n) = b_1\lambda_1^n + b_2\lambda_2^n,$$

kjer sta b_1 in b_2 primerni števili. Videli smo, da sta λ_i kompleksni števili. Potenciranje kompleksnih števil, izraženih v kartezičnih koordinatah nas pripelje do dolgih in neobvladljivih izrazov. Zelo enostavno pa je kompleksna števila potencirati, če jih izrazimo v polarni obliki.

Vsaka rešitev naše enačbe je oblike

$$x(n) = b_1\lambda_1^n + b_2\lambda_2^n,$$

kjer sta b_1 in b_2 primerni števili. Videli smo, da sta λ_i kompleksni števili. Potenciranje kompleksnih števil, izraženih v kartezičnih koordinatah nas pripelje do dolgih in neobvladljivih izrazov. Zelo enostavno pa je kompleksna števila potencirati, če jih izrazimo v polarni obliki.

Zapišimo torej λ_1 in λ_2 v polarni obliki

$$\lambda_j = |\lambda_j|(\cos\phi_j + i\sin\phi_j), \quad j = 1, 2$$

Ker sta λ_1 in λ_2 konjugirani ševili, velja $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Račun pokaže

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = (1 - \frac{\alpha^2 k}{2})^2 + (\alpha^2 k - (\frac{\alpha^2 k}{2})^2) = 1$$

in

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 k - (\frac{\alpha^2 k}{2})^2}}{1 - \frac{\alpha^2 k}{2}}\right), \quad \phi_2 = -\arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 k - (\frac{\alpha^2 k}{2})^2}}{1 - \frac{\alpha^2 k}{2}}\right).$$

Spomnimo se: α je dolžina časovnega intervala. Manjši, ko je α, bolj realistične rezultate nam bo dal naš model harmoničnega nihala z diferenčno enačbo. Lahko je videti:

$$\alpha \to 0 \Rightarrow \phi_j = \phi_j(\alpha) \to 0, \quad j = 1, 2.$$

Ker sta $\phi_j(\alpha)$ zvezni funkciji, lahko izberemo α tako, da bo

$$\phi_1 = \phi_1(\alpha) = \frac{2\pi}{N}, \quad \text{in} \quad \phi_2 = \phi_2(\alpha) = -\frac{2\pi}{N},$$

kjer je N neko (veliko) naravno število.

Pri taki izbiri intervala α imamo

$$\lambda_1 = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}, \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \cos\frac{2\pi}{N} - i\sin\frac{2\pi}{N}$$

Spomnimo se De Moivreove formule:

$$\begin{aligned}\lambda_1^n &= (\cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N})^n = \cos(n\frac{2\pi}{N}) + i\sin(n\frac{2\pi}{N})\\ \lambda_2^n &= (\cos\frac{2\pi}{N} - i\sin\frac{2\pi}{N})^n = \cos(n\frac{2\pi}{N}) - i\sin(n\frac{2\pi}{N}).\end{aligned}$$

Osnovni rešitvi iz katerih lahko sestavimo vsako drugo rešitev sta torej

$$x_1(n) = \cos(n\frac{2\pi}{N}) + i\sin(n\frac{2\pi}{N}), \quad \text{in} \quad x_2(n) = \cos(n\frac{2\pi}{N}) - i\sin(n\frac{2\pi}{N}).$$

Pri taki izbiri intervala α imamo

$$\lambda_1 = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}, \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \cos\frac{2\pi}{N} - i\sin\frac{2\pi}{N}$$

Spomnimo se De Moivreove formule:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^n &= (\cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N})^n = \cos(n\frac{2\pi}{N}) + i\sin(n\frac{2\pi}{N})\\
\lambda_2^n &= (\cos\frac{2\pi}{N} - i\sin\frac{2\pi}{N})^n = \cos(n\frac{2\pi}{N}) - i\sin(n\frac{2\pi}{N}).
\end{aligned}$$

Osnovni rešitvi iz katerih lahko sestavimo vsako drugo rešitev sta torej

$$x_1(n) = \cos(n\frac{2\pi}{N}) + i\sin(n\frac{2\pi}{N}), \quad \text{in} \quad x_2(n) = \cos(n\frac{2\pi}{N}) - i\sin(n\frac{2\pi}{N}).$$

Vendar so vrednosti teh rešitev kompleksne in zato fizikalno nesmiselne.
Lega nihala je seveda lahko le realno število.

Videli smo, da je rešitev naše enačbe tudi vsaka funkcija

$$y(n) = b_1 x_1(n) + b_2 x_2(n).$$

Videli smo, da je rešitev naše enačbe tudi vsaka funkcija

$$y(n) = b_1 x_1(n) + b_2 x_2(n).$$

Izberimo najprej $b_1 = \frac{1}{2}$ in $b_2 = \frac{1}{2}$, nato pa še $b_1 = -\frac{i}{2}$ in $b_2 = \frac{i}{2}$. Če ti dve dvojici konstant vstavimo v zgornjo enačbo, dobimo par rešitev

$$y_1(n) = \cos\left(n\frac{2\pi}{N}\right) \quad \text{in} \quad y_2(n) = \sin\left(n\frac{2\pi}{N}\right).$$

Videli smo, da je rešitev naše enačbe tudi vsaka funkcija

$$y(n) = b_1 x_1(n) + b_2 x_2(n).$$

Izberimo najprej $b_1 = \frac{1}{2}$ in $b_2 = \frac{1}{2}$, nato pa še $b_1 = -\frac{i}{2}$ in $b_2 = \frac{i}{2}$. Če ti dve dvojici konstant vstavimo v zgornjo enačbo, dobimo par rešitev

$$y_1(n) = \cos\big(n\frac{2\pi}{N}\big) \quad \text{in} \quad y_2(n) = \sin\big(n\frac{2\pi}{N}\big).$$

Lahko je videti: Če iz $x_1(n)$ in $x_2(n)$ lahko sestavimo poljubno rešitev, jo lahko sestavimo tudi iz $y_1(n)$ in $y_2(n)$, samo drugačni konstanti moramo uporabiti.

Sedaj lahko rešimo naš problem in brez dolgotrajnega računanja napovemo vse prihodnje lege harmoničnega nihala, katerih prvi dve legi sta bili $y(0) = x_0$ in $y(1) = x_1$. Poiskati moramo taki konstanti c_1 in c_2,da bo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = x_0 \\ y(1) &= c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) = x_1 \end{aligned}$$

Sedaj lahko rešimo naš problem in brez dolgotrajnega računanja napovemo vse prihodnje lege harmoničnega nihala, katerih prvi dve legi sta bili $y(0) = x_0$ in $y(1) = x_1$. Poiskati moramo taki konstanti c_1 in c_2,da bo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = x_0 \\ y(1) &= c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) = x_1 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 &= x_0 \\ c_1 \cos \frac{2\pi}{N} + c_2 \sin \frac{2\pi}{N} &= x_1 \end{aligned}$$

in od tod

$$\begin{aligned} c_1 &= x_0 \\ c_2 &= x_1 \csc \frac{2\pi}{N} - x_0 \cot \frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

Lega našega nihala v času $n\alpha$ bo torej

$$y(n) = x_0 \cos\left(n\frac{2\pi}{N}\right) + \left(x_1 \csc \frac{2\pi}{N} - x_0 \tan \frac{2\pi}{N}\right) \sin\left(n\frac{2\pi}{N}\right).$$

O začetnih podatkih: Začetna podatka pri naši nalogi sta bili pri dve legi nihala

$$y(0) = x_0 \quad \text{in} \quad y(1) = x_1$$

Ta dva podatka sta očitno ekvivalentna podatkoma

$$y(0) = x_0 \quad \text{in} \quad D(y)(0) = \frac{y(1) - y(0)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(x_1 - x_0).$$

Gibanje nihala je torej popolnoma določeno, če poznamo njegovo lego v času 0 in diferenco lege v času 1 in lega v času 0. Ta diferenca pa je enaka povprečni hitrosti nihala na poti med x_0 in x_1. Ko α manjšamo proti 0, preide diferenca v odvod, povprečna hitrost pa v trenutno hitrost. Gibanje nihala je torej popolnoma določeno, če poznamo njegovo začetno lego in njegovo začetno hitrost.

Verjetnostno napovedovanje prihodnosti

Za mnoge procese in dogajanja, ki se dogajajo v naravi ali v družbi, vemo, da njihovega poteka v prihodnosti nikakor ne bomo mogli napovedati z vso gotovostjo. Mislimo si, da neka posoda (s prostornino npr. 1 liter) vsebuje neki plin. Izbrerimo si eno molekulo tega plina in opazujmo pot, ki jo opisuje ta molekula. Hitro vidimo, da je ta pot povsem nepravilna, eratična. Molekula se zaletava v druge molekule in si z njimi izmenjuje gibalno količino. Ti trki so povsem slučajni in jih (praktično) ni možno napovedati, zato seveda tudi ni možno napovedati poti naše molekule.

Verjetnostno napovedovanje prihodnosti

Za mnoge procese in dogajanja, ki se dogajajo v naravi ali v družbi, vemo, da njihovega poteka v prihodnosti nikakor ne bomo mogli napovedati z vso gotovostjo. Mislimo si, da neka posoda (s prostornino npr. 1 liter) vsebuje neki plin. Izbrerimo si eno molekulo tega plina in opazujmo pot, ki jo opisuje ta molekula. Hitro vidimo, da je ta pot povsem nepravilna, eratična. Molekula se zaletava v druge molekule in si z njimi izmenjuje gibalno količino. Ti trki so povsem slučajni in jih (praktično) ni možno napovedati, zato seveda tudi ni možno napovedati poti naše molekule.

Opazujmo gibanje cene neke delnice na neki borzi. Na to ceno velikokrat vplivajo povsem nenapovedljivi dogodki. Če gre npr. za delico kakega podjetja, ki se ukvarja s proizvodnjo žita, lahko na ceno te delnice vplivajo vremenski pojavi, kot so hude suše in podobno. Takih vremenskih pojavov še ne znamo zanesljivo napovedovati, zato tudi ne moremo z gotovostjo napovedati, kaj se bo dogajalo s ceno omenjene delnice.

Takih nenapovedljivih procesov je ogromno - vsekakor veliko več kot tistih, ki katerih prihodnost znamo napovedati. Zelo pomemben in hkrati vejetno najenostavnejši primer takega procesa je proces, ki je v literaturi dobil ime "pot pijanega mornarja". (Izbira imena ni poštena do mornarjev, ampak to ime se je v literaturi žal ustalilo).

Takih nenapovedljivih procesov je ogromno - vsekakor veliko več kot tistih, ki katerih prihodnost znamo napovedati. Zelo pomemben in hkrati vejetno najenostavnejši primer takega procesa je proces, ki je v literaturi dobil ime "pot pijanega mornarja". (Izbira imena ni poštena do mornarjev, ampak to ime se je v literaturi žal ustalilo).

Mornar se giblje po premici. Začne v izhodišču premice. Vsako sekundo naredi en korak. Ali bo to korak v desno ali v levo, je povsem odvisno od slučaja. Kam bo stopil v N-ti sekundi (levo ali desno) je povsem neodvisno od njegovih prejšnjih korakov.

Takih nenapovedljivih procesov je ogromno - vsekakor veliko več kot tistih, ki katerih prihodnost znamo napovedati. Zelo pomemben in hkrati vejetno najenostavnejši primer takega procesa je proces, ki je v literaturi dobil ime "pot pijanega mornarja". (Izbira imena ni poštena do mornarjev, ampak to ime se je v literaturi žal ustalilo).

Mornar se giblje po premici. Začne v izhodišču premice. Vsako sekundo naredi en korak. Ali bo to korak v desno ali v levo, je povsem odvisno od slučaja. Kam bo stopil v N-ti sekundi (levo ali desno) je povsem neodvisno od njegovih prejšnjih korakov.

Očitno je nemogoče napovedati, kje bo naš mornar po npr. 50 sekundah. Vendar vseeno lahko nekaj povemo o prihodnosti našega mornarja. Naše izjave o njegovi prihodnosti pa bodo verjetnostne in **ne** deterministične.

Takih nenapovedljivih procesov je ogromno - vsekakor veliko več kot tistih, ki katerih prihodnost znamo napovedati. Zelo pomemben in hkrati vejetno najenostavnejši primer takega procesa je proces, ki je v literaturi dobil ime "pot pijanega mornarja". (Izbira imena ni poštena do mornarjev, ampak to ime se je v literaturi žal ustalilo).

Mornar se giblje po premici. Začne v izhodišču premice. Vsako sekundo naredi en korak. Ali bo to korak v desno ali v levo, je povsem odvisno od slučaja. Kam bo stopil v N-ti sekundi (levo ali desno) je povsem neodvisno od njegovih prejšnjih korakov.

Očitno je nemogoče napovedati, kje bo naš mornar po npr. 50 sekundah. Vendar vseeno lahko nekaj povemo o prihodnosti našega mornarja. Naše izjave o njegovi prihodnosti pa bodo verjetnostne in **ne** deterministične.

V nadaljevanju bomo raje govorili o delcu (slučajnem delcu), ki se giblje po premici.

Označimo s $p(n, N)$ verjetnost, da delec po N sekundah (N korakih) stoji na točki s koordinato n na premici. Kaj lahko povemo o funkciji

$$p : \mathbb{Z}_x \times \widetilde{\mathbb{N}}_t \longrightarrow \mathbb{R}$$

Označimo s $p(n, N)$ verjetnost, da delec po N sekundah (N korakih) stoji na točki s koordinato n na premici. Kaj lahko povemo o funkciji

$$p : \mathbb{Z}_x \times \widetilde{\mathbb{N}}_t \longrightarrow \mathbb{R}$$

Delec lahko na točko n prispe bodisi iz točke $n-1$ ali iz točke $n+1$. Verjetnost obeh dogodkov enaka enaka $\frac{1}{2}$. Verjetnost, da bo delec v času N prišel na mesto n z enim korakom v desno z mesta $n-1$ je torej enaka

$$\frac{1}{2} \cdot p(n-1, N-1),$$

verjetnost, da bo z enim korakom v levo prispel z mesta $n+1$ pa je enaka

$$\frac{1}{2} \cdot p(n+1, N-1).$$

Označimo s $p(n, N)$ verjetnost, da delec po N sekundah (N korakih) stoji na točki s koordinato n na premici. Kaj lahko povemo o funkciji

$$p : \mathbb{Z}_x \times \widetilde{\mathbb{N}}_t \longrightarrow \mathbb{R}$$

Delec lahko na točko n prispe bodisi iz točke $n-1$ ali iz točke $n+1$. Verjetnost obeh dogodkov enaka enaka $\frac{1}{2}$. Verjetnost, da bo delec v času N prišel na mesto n z enim korakom v desno z mesta $n-1$ je torej enaka

$$\frac{1}{2} \cdot p(n-1, N-1),$$

verjetnost, da bo z enim korakom v levo prispel z mesta $n+1$ pa je enaka

$$\frac{1}{2} \cdot p(n+1, N-1).$$

Ker se ta dva dogodka ne moreta zgoditi hkrati, je verjetnost $p(n, N)$ enaka vsoti verjetnosti zgornjih dogodkov. Torej:

$$p(n, N) = \frac{1}{2}\Big(p(n+1, N-1) + p(n-1, N-1).\Big) \tag{5}$$

Enačbo (5) lahko zapišemo v drugačni obliki. Odštejmo od leve in od desne strani količino $p(n, N-1)$. Dobimo

$$p(n, N) - p(n, N-1) = \frac{1}{2}\Big(p(n+1, N, -1) - 2p(n, N-1) + p(n-1, N-1)\Big).$$

Spomnimo se definicij diference in druge diference (pri velikosti intervala $\alpha = 1$) in označimo diferenco glede na spremenljivko n z D_x, diferenco glede na spremenljivko N pa z D_t. Zgornjo enačbo lahko prepišemo v obliki

$$(D_t p)(n, N-1) = \frac{1}{2}(D_x^2 p)(n, N-1)$$

Ta enačba se imenuje diskretna **disipacijska** enačba ali tudi **toplotna** enačba.

Ustrezna diferencialna enačba za funkcijo dveh spremenljivk

$$u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$$

se glasi

$$u_t = k u_{xx}.$$

Ta enačba opisuje širjenje toplote po enodimenzionalnem nosilcu (zelo dolgi palici).

Verjetnost $p(n_0, N_0)$, da se bo delec v času N nahajal v točni n na premici dobimo če v funkcijo $p(n, N)$ vstavimo vrednosti $n = n_0$ in $N = N_0$.
Funkcija $p(n, N)$ pa je rešitev enačbe

$$(D_t p)(n, N-1) = \frac{1}{2}(D_x^2 p)(n, N-1)$$

pri začetnem pogoju

$$p(n, 0) = \begin{cases} 1; n = 0 \\ 0; n \neq 0 \end{cases} .$$

Verjetnost $p(n_0, N_0)$, da se bo delec v času N nahajal v točni n na premici dobimo če v funkcijo $p(n, N)$ vstavimo vrednosti $n = n_0$ in $N = N_0$.
Funkcija $p(n, N)$ pa je rešitev enačbe

$$(D_t p)(n, N-1) = \frac{1}{2}(D_x^2 p)(n, N-1)$$

pri začetnem pogoju

$$p(n, 0) = \begin{cases} 1; n = 0 \\ 0; n \neq 0 \end{cases} .$$

Za precej velike čase N lahko $p(n, N)$ hitro izračunamo po iterativni poti:
Iz $p(n, 0)$ s formulo

$$p(n, 1) = \frac{1}{2}\Big(p(n+1, 0) + p(n-1, 0)\Big)$$

dobimo

$$p(n, 1) = \{\ldots, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \ldots\}.$$

Nato iz

$$p(n,2) = \frac{1}{2}\Big(p(n+1,1) + p(n-1,1)\Big)$$

dobimo

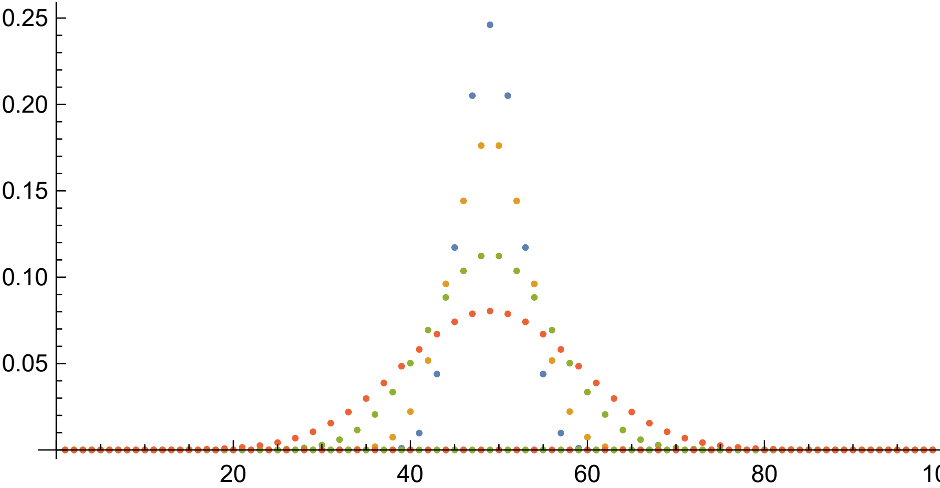
$$p(n,2) = \{\ldots, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \ldots\}.$$

Naprej:

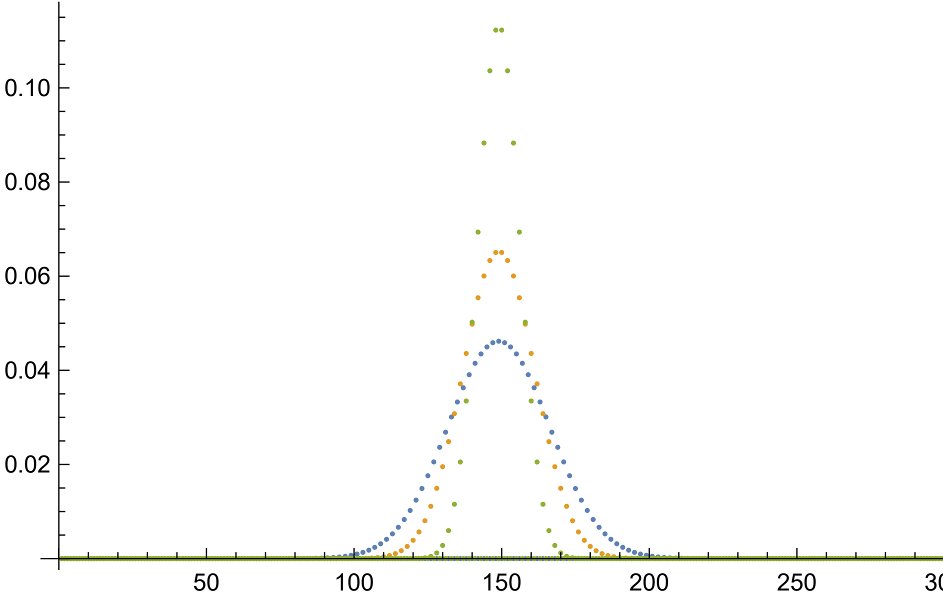
$$\{\ldots, 0, 1/8, 0, 3/8, 0, 3/8, 0, 1/8, 0, \ldots\},$$

$$\{\ldots, 0, 1/16, 0, 1/4, 0, 3/8, 0, 1/4, 0, 1/16, 0, \ldots\},$$

$$\vdots$$



$N = 11$, $N = 20$, $N = 50$, $N = 99$



$N = 50$, $N = 150$, $N = 299$,

Naš začetni problem pa lahko rešimo tudi eksplicitno. S pomočjo enostavnega kombinatoričnega premisleka lahko izračunamo, kolikšna je verjetnost, da se bo delec po N korakih znašel na mestu n na premici.

Naš začetni problem pa lahko rešimo tudi eksplicitno. S pomočjo enostavnega kombinatoričnega premisleka lahko izračunamo, kolikšna je verjetnost, da se bo delec po N korakih znašel na mestu n na premici.

Pot delca je sestavljena iz d korakov v desno in iz l korakov v levo. Za d in l velja

$$\begin{aligned} d + l &= N \\ d - l &= n \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} d &= \frac{N+n}{2} \\ l &= \frac{N-n}{2} \end{aligned}$$

Delec do mesta n lahko pride na različne načine: najprej naredi en korak v desno, nato enega v levo ....., lahko pa začne z dvema korakoma v levo... . Karkoli pa že počne, korakov v desno mora biti $d = (N + n)/2$, korakov v levo pa $l = (N - n)/2$. Prešeti moramo vse različne možne poti, sestavljene iz d korakov v desno in iz l korakov v levo.

Delec do mesta n lahko pride na različne načine: najprej naredi en korak v desno, nato enega v levo ....., lahko pa začne z dvema korakoma v levo... . Karkoli pa že počne, korakov v desno mora biti $d = (N + n)/2$, korakov v levo pa $l = (N - n)/2$. Prešeti moramo vse različne možne poti, sestavljene iz d korakov v desno in iz l korakov v levo.

Če si najprej mislimo, da "je vsak korak drugačen", potem je število različnih poti enako $N!$

Delec do mesta n lahko pride na različne načine: najprej naredi en korak v desno, nato enega v levo ....., lahko pa začne z dvema korakoma v levo... . Karkoli pa že počne, korakov v desno mora biti $d = (N+n)/2$, korakov v levo pa $l = (N-n)/2$. Prešeti moramo vse različne možne poti, sestavljene iz d korakov v desno in iz l korakov v levo.

Če si najprej mislimo, da "je vsak korak drugačen", potem je število različnih poti enako $N!$

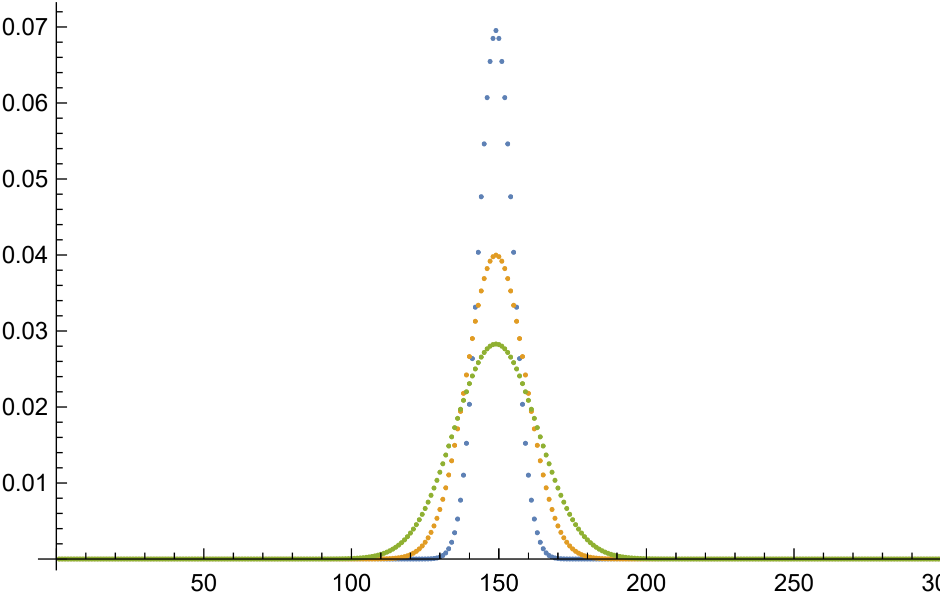
Ker pa imamo le dva različna koraka, je vseeno, kako po vrsti uredimo vse leve korake in kako vse desne. V resnici je torej število različnih poti enako

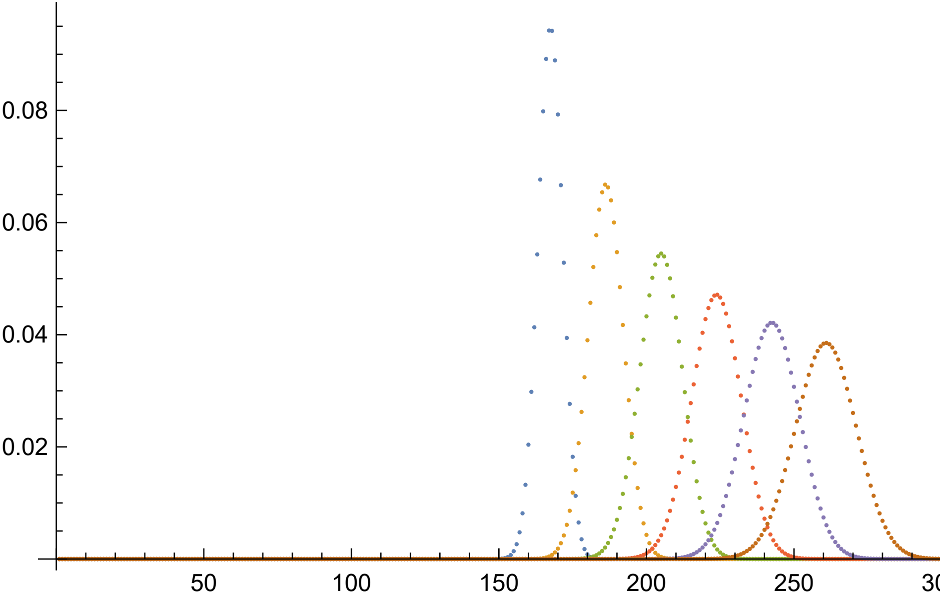
$$\frac{N!}{d! \cdot l!} = \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)!\left(\frac{N-n}{2}\right)!}$$

Ker je verjetnost vsakega koraka enaka $\frac{1}{2}$, je verjetnost zaporedja N neodvisnih korakov enaka $(\frac{1}{2})^N$.

Mornar na cilj n pride po natanko eni od $N!/(d! \cdot l!)$ poti, ki se vsaka zgodi z verjetnostjo $(\frac{1}{2})^N$. Te poti so, kot pravimo, nezdružljive. Torej je skupna verjetnost $p(n, N)$ dogodka, da bo v času N delec na mestu n enaka

$$p(n, N) = (\frac{1}{2})^N \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)! \left(\frac{N-n}{2}\right)!}$$


0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
50
100
150
200
250
30


0.08
0.06
0.04
0.02
50
100
150
200
250
30

Hvala za vašo pozornost