# Ramseyjeva teorija

Gregor Kikelj, David Opalič, Nejc Zajc
Mentor: Rok Havlas

**Povzetek**

Začnimo z množico, ki ima neko strukturo. Razdelimo jo na manjše dele. Zanima nas ali kateri od manjših delov obdrži strukturo osnovne množice. V našem članku smo iskali (neskončne) monokromatične podgrafe pobarvanega grafa in monokromatična aritmetična zaporedja pri barvanju $\mathbb{N}$.

## 1 Uvod

Pri našem MaRSovskem projektu smo se ukvarjali z Ramseyjevo teorijo. Le-ta proučuje obstoj monokromatičnih ali enobarvnih struktur v barvanih vesoljih. Tako smo barvali povezave grafov in naravna števila s končno ali neskončno barvami ter pri tem iskali monokromatične podmnožice z določenimi lastnostmi.

Imamo množico $X$ z določeno strukturo. Razbijemo jo na več delčkov in zanima nas ali je kakšen izmed teh delčkov ohranil dano strukturo prvotne

množice. To razbitje lahko ponazorimo ravno z barvanjem elementov $X$. Elementi znotraj enega delčka so tako pobarvani z isto barvo in tukaj si lahko pomagamo z Ramseyjevo teorijo.
Začeli smo pri vprašanju ali lahko v grafu velikosti $N$ in pri poljubnem barvanju povezav $c$ najdemo monokromatičen podgraf velikosti $r$. Nadaljevali pa smo vse do neskončnega števila barv, neskončnih grafov in naravnih števil.

# 2 Notacija in definicije

Za začetek definirajmo nekaj osnovnih pojmov, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju.

- Z $\mathbb{N}$ označimo množico naravnih števil, torej $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.
- Naj bo $[n]$ množica prvih $n$ naravnih števil, torej $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

**Definicija 1.** *Naj bo $X$ množica. Potem naj bo $X^{(r)}$ množica vseh $r$-elementnih podmnožic množice $X$.*

**Definicija 2.** ***Graf** $G$ je par $(V, E)$, kjer je $E \subset V^{(2)}$.*

**Definicija 3.** ***Poln graf** je graf, kjer so vsaki dve vozlišči povezani.*

**Definicija 4.** ***Barvanje** množice $X$ s $k$ barvami je preslikava $c : X \to [k],\ k \in \mathbb{N}$.*

**Definicija 5.** *Množico $Y \subset X$ imenujemo **monokromatična podmnožica**, če je za vsak $y \in Y,\ c(y) = konst.$.*

**Definicija 6.** ***Poln monokromatičen graf** je poln graf, pri katerem so vse povezave enake barve.*

# 3 Ramseyev izrek

Pobarvajmo $\mathbb{N}^{(2)}$, to so vsi pari naravnih števil, in sicer takole: predstavljajmo si, da so naravna števila točke grafa, pari naravnih števil pa povezave med njimi. Te povezave poljubno pobarvamo s $k$ barvami. Ali obstaja neskončna monokromatična podmnožica, tj. ali obstaja poln neskončen monokromatičen podgraf?
Odgovor je da, poda pa nam ga **Ramseyev izrek**.

**Izrek 1.** ***(Ramseyev izrek)***
*Za vsako barvanje $\mathbb{N}^{(2)}$ s $k$ barvami*

$$c : \mathbb{N}^{(2)} \to [k], k \in \mathbb{N}$$

*obstaja neskončna monokromatična podmnožica $X \subset \mathbb{N}$, da je $c|_{\mathbb{N}^{(2)}} =$ konst.*

*Dokaz.* Pogledamo nek $a_1 \in \mathbb{N}$ in njegove povezave. Teh povezav je neskončno, barv pa je končno, zato po *Dirichletovem principu* obstaja neskončno povezav neke barve z $a_1$, ta barva naj bo $c_1$. Naj bo neskončna množica $B_1$ množica točk, ki so z $a_1$ povezane z barvo $c_1$. Ker je tudi množica $B_1$ neskončna, lahko postopek ponovimo. Podobno izberemo $a_2 \in B_1$ in tako obstaja $B_2 \subset B_1$, da so vse povezave $a_2$ z elementi $B_2$ barve $c_2$, $B_2$ pa je še vedno neskončna.

Induktivno nadaljujemo in dobimo zaporedje točk $\{a_1, a_2, \ldots\}$ in zaporedje barv $\{c_1, c_2, \ldots\}$. To je neskončno zaporedje barv, mi pa jih imamo na voljo le $k$, zato obstaja barva, ki se v tem zaporedju pojavi neskončnokrat. Ta barva se pojavi na mestih $\{i_1, i_2, \ldots\}$, torej velja $c_{i_1} = c_{i_2} = \ldots$, kar pa pomeni, da je podgraf na točkah $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\}$ monokromatičen. $\square$

Izrek nam sicer ne pove nič o tem katera množica je rešitev, zagotovi nam samo njen obstoj.

Kaj pa, če $\mathbb{N}^{(2)}$ pobarvamo z neskončno barvami? V tem primeru lahko hitro najdemo takšno barvanje, da neskončna monokromatična podmnožica ne obstaja. Vsako povezavo pobarvamo s svojo barvo in zato ne moremo najti niti dveh povezav iste barve, kaj šele neskončen podgraf.

# 4 Ramseyev izrek na končnih grafih

Vzemimo zdaj končen graf in pobarvajmo povezave z 2 barvama. Zanima nas, ali lahko najdemo monokromatični polni podgraf na $r$ vozliščih, $r < n$. Izkaže se, da je odgovor odvisen od vrednosti $n$ in $r$. Če je $r$ dovolj majhen v primerjavi z $n$ je odgovor zmeraj da, sicer pa ni nujno, kar bomo videli v nadaljevanju.

## 4.1 Probabilistična metoda

**Definicija 7.** ***Pričakovana vrednost*** *diskretne slučajne spremenljivke $X$ je podana kot*

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i),$$

*kjer je $\sum_i p(x_i) = 1$, $x_i$ so vredosti slučajne spremenljivke, $p(x_i)$ pa je verjetnost da bo $X = x_i$.*

Naj bo barva $c_1$ rdeča in barva $c_2$ modra. Z njima pobarvamo povezave grafa na $n$ vozliščih. Recimo da je vsaka povezava pobarvana rdeče ali modro z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Izračunajmo pričakovano vrednost, da tak graf vsebuje monokromatičen poln podgraf na $k$ vozliščih. To bomo naredili tako, da bomo sešteli pričakovane vrednosti za vse podgrafe na $k$ vozliščih.

Lotimo se izračuna števila polnih podgrafov velikosti $r$. Vseh podgrafov velikosti $r$ v grafu z $n$ vozlišči je $\binom{n}{r}$. Izračunajmo še verjetnost, da je tak graf monokromatičen. Graf na $r$ vozliščih ima $\binom{r}{2}$ povezav, verjetnost, da so vse modre, je $2^{-\binom{r}{2}}$. Analogno naredimo za rdeče. Skupna verjetnost, da je graf na $k$ vozliščih monokromatičen je torej enaka $2 \cdot 2^{-\binom{r}{2}}$. Za podgraf $S$ uvedimo indikatorsko spremenljivko $y(S)$, ki ima vrednost 1, če je $S$ monokromatičen in 0, če ni.
Tako je

$$E(y(S)) = p(y(S) = 0) \cdot 0 + p(y(S) = 1) \cdot 1 = p(y(S) = 1),$$

to pa je ravno verjetnost, da je $S$ monokromatičen, zato vemo da je $E(y(S)) = 2^{1-\binom{r}{2}}$ za vsak podgraf $S$ s $r$ vozliščči.

Skupna pričakovana vrednost je torej

$$E(\text{število monokromatičnih podgrafov na r vozliščih}) = E(\sum_{|S|=r} (y(S)) =$$

$$= \sum_{|S|=r} E(y(S)) = \binom{n}{r} \cdot E(y(S)) = \binom{n}{r} 2^{1-\binom{r}{2}}.$$

Pričakovana vrednost je manjša od 1, ko je $\binom{n}{r} < 2^{\binom{r}{2}-1}$. Ker je pričakovana vrednost vedno celo število, obstaja primer, kjer je ta vrednost 0. To pomeni, da obstaja tako barvanje, pri katerem ne moramo najti polnega monokromatskega podgrafa na $r$ vozliščih. Tako dobimo mejo za $r$, ki pa ni stroga.

Za $r$ pod to mejo, takšnega podgrafa ni enostavno poiskati, se pa lahko vprašamo, najmanj koliko točk mora imeti graf, da lahko ne glede na barvanje najdemo monokromatični podgraf velikosti $r$. Najmanjše takšno število točk imenujemo **Ramseyjevo število** in ga označimo $R(n)$, včasih tudi $R(K_n)$.

**Izrek 2.** ***(Ramseyev izrek za končne grafe)***
*Vrednost $R(n)$ je vedno končno število.*

*Dokaz.* Recimo, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $R(n) = \infty$. Potem za vsak $m \geq n$ velja, da obstaja barvanje, ki ne naredi monokromatičnega polnega podgrafa na $n$ vozliščih.
Dirichletov princip nam zagotavlja, da obstaja neskončna množica $M_1 \subset \mathbb{N}$ in obstaja fiksno barvanje $d_n$ na $[n]$, tako da za vsak $m \in M_1$: $c_m|_{[n]^{(2)}} = d_n$. To pomeni, da bomo pri barvanju vse večjih grafov, neskončnokrat lahko našli popolnoma enako pobarvano povezave podmnožice $n$ točk. Induktivno prav tako obstaja neskončna množica $M_{i+1} \subset M_i$ in obstaja fiksno barvanje $d_{n+i}$ na $[n+i]$, tako da za vsak $m \in M_{i+1}$: $c_m|_{[n]^{(2)}} = d_{n+i}$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. $M_1$ nam fiksira n barv, z nadaljnim večanjem $i$ pa se seznam kako pobarvati povezave v množici $[n+i]$ točk veča. Tako $d_i$ "vsebuje"barvanje $d_j$ za $i > j$. Definirajmo zdaj barvanje na $\mathbb{N}^{(2)}$, in sicer $c : \mathbb{N}^{(2)} \to [2]$. Za to barvanje velja $c(ij) = d_a(ij)$ za vse $a > i, j$. To pomeni, da se opisano barvanje $\mathbb{N}^{(2)}$ ujema z barvanjem $d_{n+i}$ za vsak $i$. Zaradi načina konstrukcije $d_{n+i}$ nam tudi to barvanje ne da monokromastkega podgrafa na $n$ vozliščih, niti na $m > n$ vozliščih. Po Ramsayevem izreku pa vemo, da mora obstajati neskončna monokromatična podmnožica $\mathbb{N}^{(2)}$. To nas privede protislovje.
Torej je $R(n)$ vedno naravno število.

# 5 Ramseyeva teorija na naravnih številih

Do sedaj smo se ukvarjali z barvanji grafov, v tem delu pa si bomo ogledali barvanja naravnih števil. Tako bomo zdaj barvali točke in ne več povezav.

Najprej se vprašajmo ali za poljubno barvanje naravnih števil vedno obstaja neskončna monokromatična podmnožica. Če je barv končno, po *Dirichletovem principu* obstaja barva, s katero je pobarvanih neskončno točk. Te točke torej tvorijo neskončno monokromatično podmnožico.

Upoštevajmo zdaj še aditivno strukturo množice $\mathbb{N}$. Zanima nas ali lahko najdemo neskončno monokromatično aritmetično zaporedje.
Hitro opazimo, da to ni mogoče, za sledeči protiprimer pa zadostujeta že dve barvi.



Barvajmo točke izmenično z dvema barvama, na primer z modro in rdečo. Naj bo 1 modra točka, nato 2 rdeči, 3 modre, 4 rdeče in tako naprej. Recimo, da obstaja monokromatično aritmetično zaporedje z diferenco $d$, v eni izmed barv. Pri dovolj velikih številih bomo naleteli na poljubno velike bloke druge barve dolžine $a > d$. Ker so bloki preveliki, da bi jih naše aritmetično zaporedje preskočilo, bo zagotovo vsaj en člen pristal v tem bloku, kar je protislovje. Tako vidimo, da neskončno dolgega aritmetičnega zaporedja ne moremo imeti.

**Izrek 3.** ***(Van der Waerden)***
*Za vsaka $m, k \in \mathbb{N}$ obstaja takšno število $n = W(m, k)$, da če $[n]$ pobarvamo s $k$ barvami, obstaja monokromatično aritmetično zaporedje dolžine $m$.*

Z drugimi besedami: najdemo lahko poljubno dolgo aritmetično zaporedje.
Da pa lahko ta izrek dokažemo, najprej definirajmo **fokusirana zaporedja**.

**Definicija 8.** *Zbirka aritmetičnih zaporedij $A_1, \ldots, A_r$ dolžine $m$ z $A_i = \{a_i, a_i + d_i \ldots, a_i + (m-1)d_i\}$ je **fokusirana** v $f$, če velja $f = a_i + md_i$ za vsak $i$.*

**Definicija 9.** *Če so zaporedja $A_i$ fokusirana v $f$ in je vsako monokromatično ter so paroma različnih barv, so ta zaporedja **barvno fokusirana** v $f$.*

*Dokaz izreka.* Naredili bomo indukcijo po $m$. Bazni primer $m = 1$ je jasen. Po indukcijski predpostavki naj obstaja naravno število $W(m-1, k')$ za poljuben $k' \in \mathbb{N}$. Zdaj postavimo naslednjo trditev.

**Trditev 1.** *Za vsak $r \leq k$ obstaja tako naravno število $n$, da ko $k$-barvamo $[n]$, velja ena od sledečih trditev:*

*i) obstaja monokromatično aritmetično zaporedje dolžine $m$*

*ii) obstaja $r$ barvno fokusiranih aritmetičnih zaporedij dolžine $m-1$.*

Da dokažemo izrek je dovolj dokazati to trditev. Kajti če velja $i$), smo končali, v nasprotnem primeru pa si pogledamo primer, ko je $r = k$ in imamo $k$ barvno fokusiranih aritmetičnih zaporedij dolžine $m-1$. Njihov fokus mora biti iste barve kot eno od zaporedij in tako dobimo monokromatično aritmetično zaporedje dolžine $m$, s čimer dokažemo indukcijski korak. Dokažimo torej trditev.

*Dokaz trditve.* Tokrat naredimo indukcijo na $r$. Baza indukcije v izreku $r = 1$ velja, saj vemo, da obstaja aritmetično zaporedje dolžine $m-1$ po prvotni indukcijski predpostavki.
Indukcijska predpostavka: Obstaja nek $n'$, da trditev velja za $r-1$, $r > 1$.
Pokazali bomo, da za $r$ deluje že $n = W(m-1, k^{2n'})2n'$. Pobarvajmo množico $[n]$ s $k$ barvami. Recimo, da množica ne vsebuje monokromatičnega aritmetičnega zaporedja dolžine $m$, saj smo sicer končali. Želimo najti $r$ barvno fokusiranih aritmetičnih zaporedij dolžine $m-1$.
Razdelimo $[n]$ na $W(m-1, k^{2n'})$ blokov dolžine $2n'$. Poglejmo te bloke kot posamezne elemente. Dva bloka sta pobarvana enako, če so vse istoležne točke znotraj njiju pobarvane enako; torej imamo $k^{2n'}$ različnih barvanj enega bloka. Zaradi definicije števila $W(m-1, k^{2n'})$ lahko med temi bloki najdemo $m-1$ blokov $B_s, \ldots, B_{s+(m-2)a}$, ki tvorijo monokromatično aritmetično zaporedje. Naj zgornji indeks $i$ pomeni, da smo znotraj bloka $B_i$.
Po indukcijski predpostavki lahko v vsakem bloku $B_i$, $i \in \{s, \ldots, s+(m-2)a\}$ najdemo $r-1$ barvno fokusiranih aritmetičnih zaporedij dolžine $m-1$. Naj bodo to $A_1^i, \ldots, A_{r-1}^i$ z začetnimi členi $a_1^i, \ldots, a_{r-1}^i$ in diferencami $d_1^i, \ldots, d_{r-1}^i$. Njihov fokus naj bo $f^i$. Ker nimamo aritmetičnega zaporedja dolžine $m$, mora biti barva fokusa različna od barve vseh drugih $r-1$ zaporedij.
Poglejmo aritmetična zaporedja $A_1', \ldots, A_{r-1}'$, kjer ima $A_i'$ začetni člen $a_i^1$, diferenco $d_i' = d_i + 2n'$ in dolžino $m-1$. Vzemimo še $A_r = \{f, f+2n', \ldots, f+2n'(m-2)\}$, torej ravno množico vseh fokusov zaporedij $A_i$. Skonstruirali smo $r$ monokromatičnih aritmetičnih zaporedij različnih barv s skupnim fokusom v $F = f + 2n'(m-1)$. S tem smo zaključili indukcijo in dokazali trditev.

$\square$

Dokaz izreka sledi iz trditve, kot smo pokazali že zgoraj. $\square$

# 6 Pogled naprej

Področje Ramseyeve teorije je še mlado in se zelo hitro razvija. Med drugim tudi združuje kombinatorične prijeme s teorijo števil. Mi smo si pogledali samo osnove, obstajajo pa še številni težji in pomembnejši izreki. Eden izmed njih je recimo **Szemeredijev izrek**.

**Izrek 4.** *(Szemeredijev izrek)*
*Za vsak $\delta > 0$ in za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, tako da vsak $A \subset [n]$, za katerega velja $|A| > \delta n$, vsebuje aritmetično zaporedje dolžine $k$.*
*Drugače rečeno, če imamo neko podmnožino $A \subset \mathbb{N}$ ki ima "gostoto"$> 0$ potem $A$ vsebuje poljubno dolga aritmetična zaporedja.*

# Literatura


[1] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, Wiley, New York, 1980.

[2] B. Narayanan, *Lecture notes, taken at the course on Ramsey theory*, Cambridge, 2017.