Ulovimo lopova!

Daša Čebulj, Mia Zala Smrečnik, Luka Svenšek
Mentor: Simon Brezovnik

2. avgust 2019

Povzetek

Projekt obsega strateško analizo igre Lopov in policisti, pri čemer si pomagamo z metodami teorije grafov. Igra predstavlja eno izmed modifikacij dobro znane igre Pac-Man, cilj igre pa je določiti najmanjše število policistov, ki lahko na izbranem igralnem polju ulovijo lopova. Namen projekta je s pomočjo matematičnega znanja policistom olajšati delo in jiim na še tako kompleksnem terenu pomagati za vedno uloviti nepridiprava.

1 Uvod

Vsebinsko jedro projekta je igra Lopov in policisti, ki jo lahko preoblikujemo v jezik teorije grafov. V igri tekmujeta dva igralca. S potezo začne igralec, ki upravlja s položajem policistov, drugi je na vrsti policist. Nato si poteze izmenjajoče sledijo. policisti in lopovi se lahko premikajo zgolj po povezavah grafa, cilj igre pa je, da v končno mnogo potezah vsaj eden od policistov ulovi lopova. Če se to ne zgodi, je zmagovalec lopov. Kombinatorično igro so leta 1980 predstavili matematiki Quilliot, Nowakowski ter Winkler in že vrsto let predstavlja raziskovalno področje številnim matematikom na področju teorije grafov. Rezultati so uporabni v telekomunikacijskih omrežjih, kjer se da z njihovo pomočjo uloviti „vsiljivca" v omrežju in preprečiti nastale probleme [6]. Različne variante igre imajo uporabno vrednost tudi v robotiki, natančneje pri načrtovanju poti robota pri robotskem iskanju, glej vir [7].

Članek je sestavljen iz treh glavnih delov. Na začetku bomo predstavili nekaj osnovnih pojmov teorije grafov, ki jih bomo potrebovali za razumevanje nadaljevanja. V naslednjem poglavju bodo predstavljena pravila igre Lopov in policisti, ki je osrednja tema tega članka. Na koncu bomo predstavili nekaj zanimivih izrekov, s pomočjo katerih si lahko olajšamo iskanje najmanjšega števila policistov, ki jih potrebujemo, da ulovimo lopova. Glavni izrek članka nam omogoča, da izračunamo najmanjše število policistov, ki ujamejo lopova na Petersenovem in Hoffman-Singletonovem grafu.

2 Osnove teorije grafov

Poglejmo si nekaj osnovnih definicij teorije grafov, ki so povzete po virih [1], [2] in [3].

Graf G je definiran kot urejen par $(V(G), E(G))$, kjer $V(G)$ predstavlja neprazno množico vozlišč, $E(G)$ pa množico povezav med vozlišči. Dve različni vozlišči, ki pripadata isti povezavi, imenujemo **sosednji vozlišči**. Množico vseh vozlišč, ki so sosednja z nekim vozliščem v, imenujemo **odprta soseščina** vozlišča v in označimo z $N_G(v)$ ali kar $N(v)$, če je iz besedila razvidno, da gre za graf G. Če dodatno v to množico vključimo še vozlišče v, temu pravimo **zaprta soseščina** vozlišča v, ki jo označimo z $N_G[v]$ oz. $N[v]$.

Stopnja vozlišča $deg(v)$ nam pove število povezav, ki potekajo iz vozlišča v. Najmanjšo stopnjo vozlišča, nahajajočega se v grafu G, označimo z $\delta(G)$, medtem ko $\Delta(G)$ predstavlja največjo stopnjo vozlišča grafa G. Vozlišču stopnje 1 pravimo **list**.

Naj bo D poljubna množica vozlišč grafa G. Če za vsako vozlišče $v \in V(G) \setminus D$ velja, da je sosednje z nekim vozliščem iz D, takšni množici D pravimo **dominantna množica**.

Enostaven graf je graf, ki ne vsebuje zank (povezav vozlišč s samim sabo) in vzporednih povezav (večkratnih povezav med istim parom vozlišč). Enostaven graf P_n z množico vozlišč $V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$ imenujemo **pot**. Če takšnemu grafu dodamo še povezavo med vozliščema v_1 in v_n, dobimo **cikel** C_n. Najmanjši cikel v grafu imenujemo **ožina** O. **Dolžino poti** in **dolžino cikla** dobimo s preštevanjem povezav, ki sestavljajo to pot oz. ta cikel. **Razdalja** med vozliščema v grafu je dolžina najkrajše poti med njima. Razdaljo med najbolj oddaljenima vozliščema v grafu imenujemo **diameter grafa**.

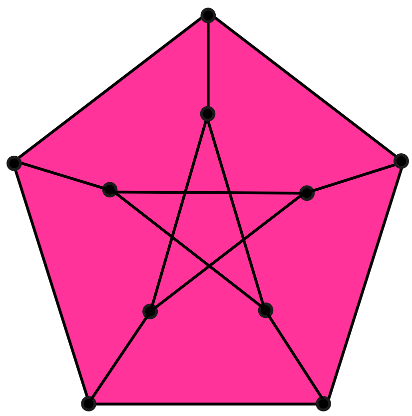
Če med dvema poljubnima vozliščema obstaja pot, pravimo, da se ti vozlišči nahajata v **isti povezani komponenti**. V primeru, da graf sestavlja zgolj ena povezana komponenta, je takšen graf **povezan**. V kolikor to ne drži, imenujemo graf **nepovezan graf**.

Graf je **končen**, kadar ima končno število vozlišč in končno število povezav. Sicer je graf **neskončen**.

V nadaljevanju bodo vsi naši grafi končni, povezani in enostavni.

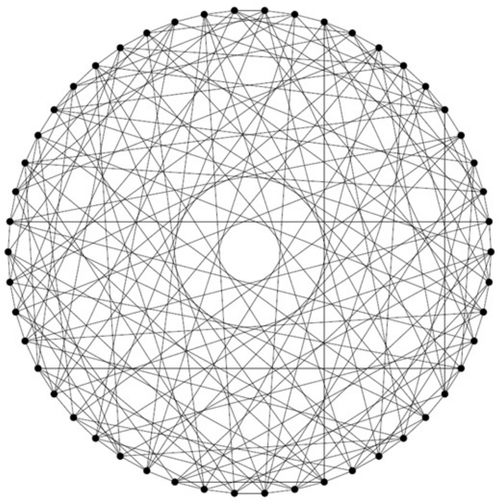
Regularen graf je graf, katerega vse stopnje vozlišč so enake. Natančneje jih lahko imenujemo n-regularni grafi, pri čemer n označuje stopnjo vozlišč tega grafa. Primera regularnih grafov sta npr. **Petersenov graf** in **Hoffman-Singletonov graf**, ki jih prikazujeta sliki 1 in 2.

Hoffman-Singletonov graf je 7-regularen graf, z ožino 5 in diametrom 2. Petersenov graf je poimenovan po Juliusu Petersenu in je 3-regularen, z 10 vozlišči in 15 povezavami.



P

Slika 1: Petersenov graf.



Slika 2: Hoffman-Singletonov graf, vir slike: [4].

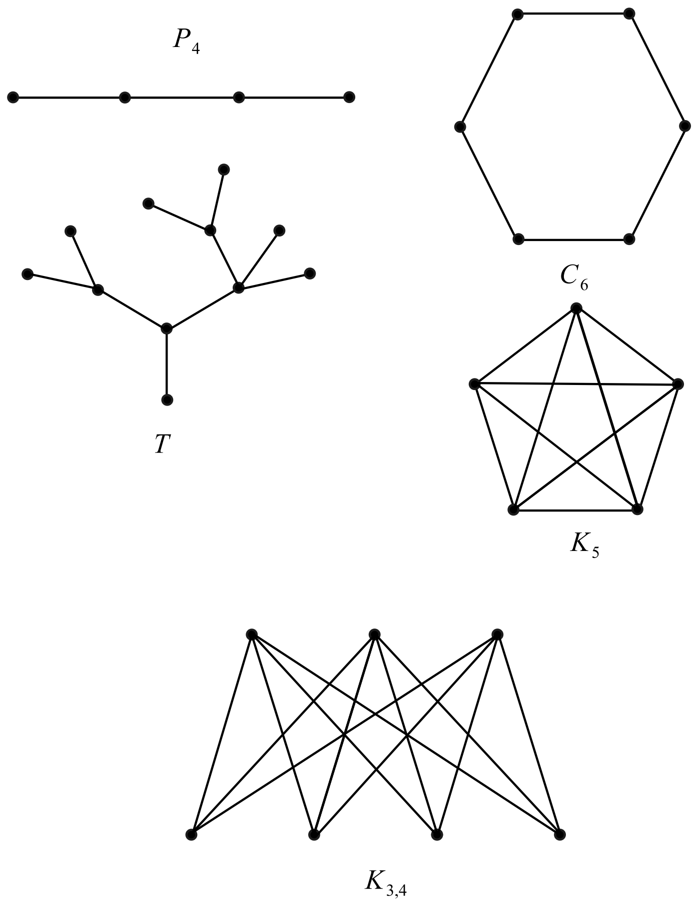
Poseben primer regularnih grafov so **polni grafi**, ki jih označimo s K_n, katerih vsa različna vozlišča so paroma sosednja.

Dvodelen graf $K_{m,n}$ je graf, katerega vozlišča lahko razbijemo na dve podmnožici M in N, imenovani particiji, tako da vsako povezavo grafa G določata vozlišči, ki ne pripadata isti množici M ali N. V kolikor med množicama M in N obstajajo vse možne povezave, takšen graf imenujemo **poln dvodelen graf**.

Neusmerjen graf brez ciklov imenujemo **gozd**. Povezan gozd imenujemo **drevo**.

Primer poti na štirih vozliščih, cikla dolžine šest, drevesa, polnega grafa s petimi vozlišči in polnega dvodelnega grafa z množico M moči tri in množico N moči štiri prikazuje slika 3.

Vozlišče v grafa G imenujemo **kot**, če obstaja takšno vozlišče tega grafa $u \neq v$, da je $N[v] \subseteq N[u]$.



Slika 3: Primeri nekaterih osnovnih grafov.

3 Igra Lopov in policisti

Pravila igre so povzeta po glavnem viru [4] tega članka.

Igralno polje igre Lopov in policisti je neusmerjen enostaven graf. Igra se začne, ko prvi igralec določi vozlišča, ki jih bodo zasedli policisti. Nato drugi igralec določi vozlišče lopovu, s čimer se zaključi 0. krog. V vsakem nadaljnem krogu se najprej premaknejo policisti in nato lopov. Policisti in lopov se lahko v vsakem krogu premaknejo na sosednje vozlišče ali pa ta krog počivajo (ostanejo na istem mestu). Za policiste velja tudi, da se lahko naenkrat premakne poljubna podmnožica policistov, prav tako pa lahko več policistov zasede isto vozlišče.

Igra se konča, ko policist zasede isto vozlišče kot lopov. Če se to nikoli ne more zgoditi, pravimo, da je zmagovalec lopov. V analizi igre predpostavimo, da so poteze policistov in lopova optimalne.

Najmanjše število policistov, ki jih potrebujemo, da na grafu G zagotovo ujamemo lopova, imenujemo **policijsko število** grafa G in ga označimo s $c(G)$.

Če na nekem grafu lahko en policist vedno ulovi lopova, ta graf imenujemo **policijski graf**.

Če na nekem grafu lopov vedno lahko ubeži enemu policistu, ta graf imenujemo **lopovski graf**.

V nadaljevanju bomo predstavili policijsko število nekaterih osnovnih grafov, tj. poti, dreves, ciklov, polneih grafov in dvodelnih polnih grafov.
Policijsko število poti je enako 1, saj se lahko policist ne glede na začetno izbrano lokacijo pomika proti lopovu, dokler lopov ne naleti na list in je ujet v kot. Pot je torej policijski graf.

Podoben razmislek lahko naredimo tudi na drevesu, kjer prav tako zadostuje en policist. Recimo, da sta policist in lopov na razdalji d. Policist vedno lahko naredi potezo v smeri lopova in tako zmanjša razdaljo med njima za ena. Po drugi strani se lahko lopov oddaljuje od policista za razdaljo ena samo končno število korakov, dokler ne naleti na list. Ker je drevo končno, se to gotovo v nekem trenutku zgodi. Ko se to zgodi d-krat, je lopov ulovljen.

V ciklu dolžine 4 ali več en policist ne zadostuje, ker se lahko lopov od policista v vsaki potezi oddalji na razdaljo vsaj 2 od policista. Za gotovo zmago policistov tako potrebujemo še enega policista, da lahko skupaj s prejšnjim obkolita lopova. Policijsko število ciklov dolžine vsaj 4 je zato 2. Ti grafi so torej lopovski.

Za polni graf je dovolj le en policist, saj ima vsako vozlišče povezavo do vseh drugih vozlišč. Torej je polni graf policijski graf.

V polnem dvodelnem grafu zadostujeta dva policista. Postavimo jih na poljubni vozlišči, ki sta vsaka v svoji particiji tega grafa. Tako je vsako od vozlišč povezano z enim od vozlišč, na katerih sta policista.

4 Glavne ugotovitve

Kadar iščemo policijsko število grafov, se zaradi obsega podatkov ne da vedno preučiti vseh možnih strategij. Zato si, še posebej pri večjih grafih, pomagamo z različnimi matematičnimi ugotovitvami, ki nam olajšajo delo. V nadaljevanju si poglejmo nekatere izmed njih. Izreki so povzeti po glavnem viru članka [4].

Izrek 1. *Vsak regularen graf je lopovski graf, razen če je poln.*

Dokaz. Naj bo G poljuben regularen graf in d stopnja vseh njegovih vozlišč. Najprej postavimo policista na poljubno vozlišče u. Ker graf G po predpostavki ni poln, gotovo obstajata dva soseda vozlišča u, ki nista povezana. Označimo enega z v. Ker v ni povezan z enim od sosedov vozlišča u in ima d sosedov, ima gotovo enega soseda $v' \neq u$, ki ni sosed z vozliščem u. Na v' postavimo lopova.

V kolikor se policist ne približa v' na razdaljo 1, se lopovu ni potrebno premakniti. Zato predpostavimo, da se policist v neki potezi premakne na vozlišče u', ki je od vozlišča v' oddaljen za 1. Ker je u' povezan z vozliščem iz katerega je prišel policist, v' pa ne, in ker imajo vsa vozlišča grafa enako stopnjo, gotovo obstaja vozlišče v'', ki ni povezano z u'. Torej lahko lopova prestavimo na v'' in smo ubežali policistu. Ker smo to dokazali za poljuben položaj policista, lahko to storimo na vsakem koraku, torej je graf res lopovski.

Izrek 2. *Policijski graf ima vsaj en kot.*

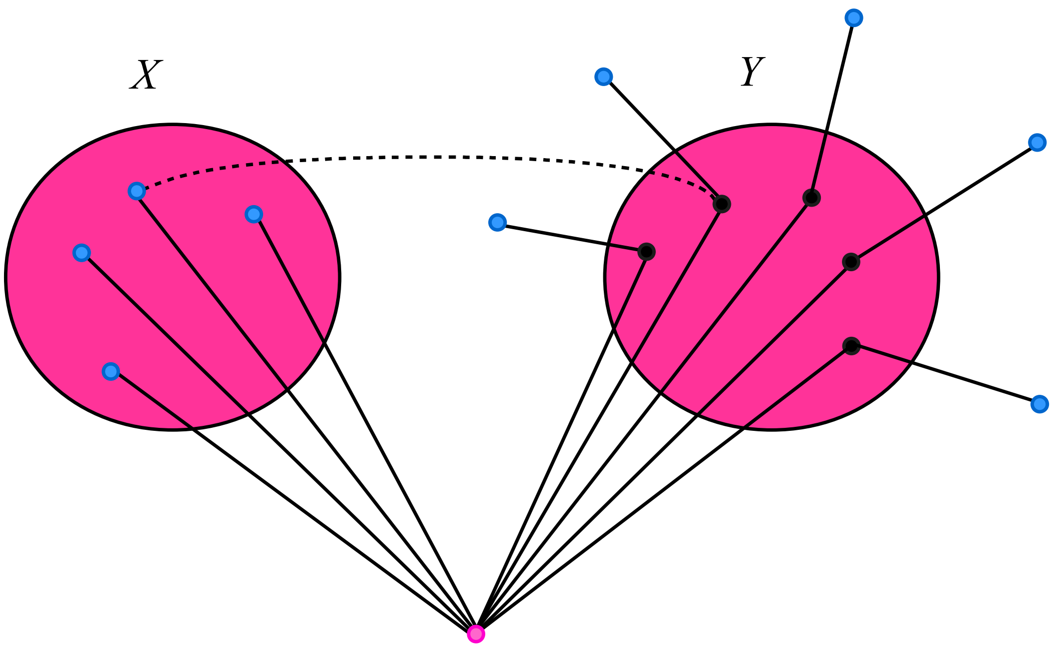
Dokaz. Vzemimo graf G in predpostavimo, da lahko en policist vedno ujame lopova. Poglejmo si poljuben konec te igre. Zadnji korak lopova nastopi natanko tedaj, ko je zaprta soseščina vozlišča, na katerem je lopov, vsebovana v zaprti soseščini vozlišča, na katerem je policist. To pa je ravno definicija kota.

Naslednji izrek je glavni izrek našega članka in močno olajša iskanje policijskega števila za nekatere družine grafov.

Izrek 3 (Glavni izrek)**.** *Naj bo G graf, katerega ožina je ≥ 5 in najmanjša stopnja $\delta(G)$. Potem velja $c(G) \geq \delta(G)$.*

Dokaz. Recimo, da obstaja takšna strategija za $\delta(G) - 1$ policistov, da lahko ujamejo lopova na tem grafu.

Najprej pokažimo, da obstaja takšna začetna postavitev za lopova, da v začetnem krogu preživi. Vseh $\delta(G)$–1 policistov postavimo na poljubna mesta in iščemo takšno vozlišče grafa, ki ni povezano z nobenim izmed teh vozlišč, na katerih se nahajajo ti policisti. Recimo, da takšno vozlišče ne obstaja. Potem je vsako vozlišče grafa povezano z vsaj enim policistom. Torej množica policistov tvori dominantno množico. Poglejmo si eno izmed vozlišč tega grafa, npr. vozlišče u, na katerem še ni policista. Ker je število policistov manjše kot δ, zato takšno vozlišče obstaja. Definirajmo X kot množico vseh sosedov vozlišča u, na katerih se nahajajo policisti. Po drugi strani pa definirajmo množico Y kot množico vseh ostalih sosedov vozlišča u. Na sliki 4 sta označeni množici X in Y, položaj lopova (roza obarvano vozlišče) ter položaji policistov (modro obarvana vozlišča). Opazimo, da zagotovo obstaja vozlišče v množici Y, saj je število policistov manjše od stopnje vozlišča u. Ker je množica volišč s policisti dominantna množica, ima vsako vozlišče v Y vsaj enega soseda, ki je policist. Ta sosed ne more biti iz X, saj bi tako tvorili cikel dolžine 3. Prav tako smo ugotovili, da dve različni vozlišči iz množice Y ne moreta biti sosedi istega policista, saj bi tudi na ta način tvorili štiricikel, ki po definiciji ne sme obstajati. Torej smo ugotovili, da ima vsako vozlišče iz Y svojega soseda, ki je policist. Imamo torej $|X|+|Y|$ policistov, kar je enako ali večje stopnji vozlišča u, ki je δ. To je v nasprotju z začetno predpostavko, da je policistov $\delta(G) - 1$.

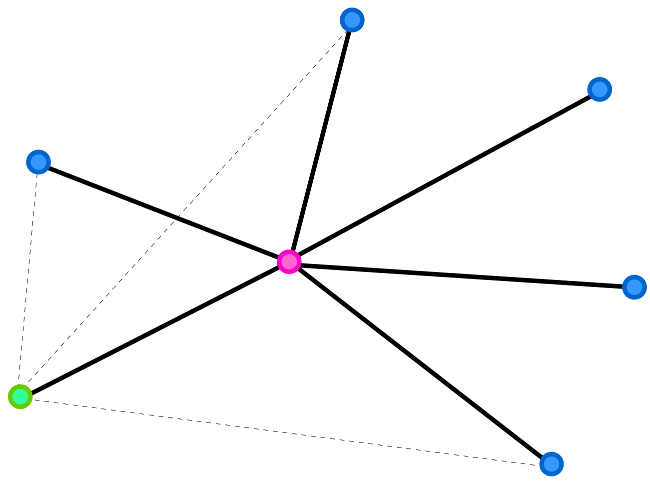


Slika 4: Prikaz množic X in Y in pripadajočih povezav grafa G.

Pokažimo sedaj, da se lahko lopov v vsakem naslednjem koraku premakne (ali ostane) na razdalji 2 od policistov. Recimo, da lopov preživi neko potezo policistov in se nahaja na vozlišču v. Poglejmo si vse možne primere, ki se lahko v nadaljevanju zgodijo.

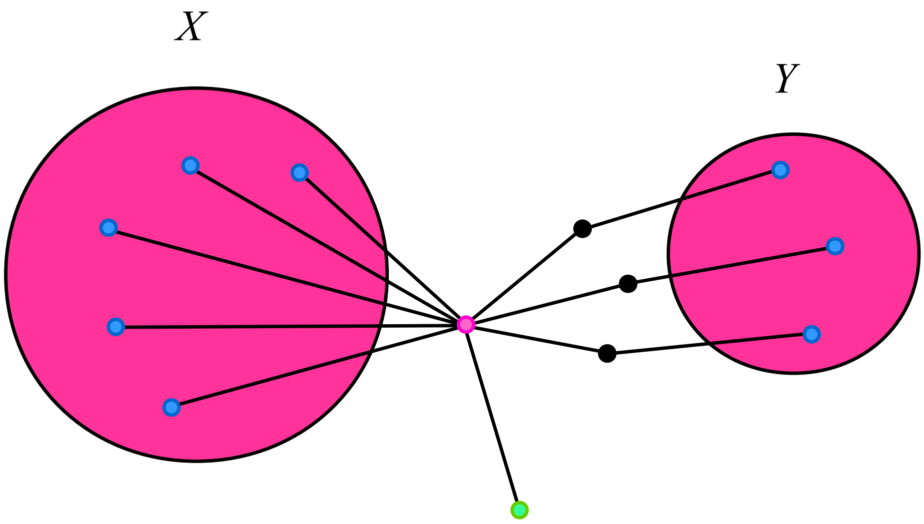
Primer 1 Vsi policisti so sosedi lopova (slika 5).

Ker je $\delta(G)-1$ policistov, stopnja vozlišča v pa vsaj $\delta(G)$ obstaja sosed vozlišča v (označen z zeleno barvo na sliki 5), na katerem se ne nahaja policist. Imenujmo to vozlišče v'. Če bi bil v' povezan s katerimkoli policistom, bi graf vseboval cikel dolžine 3, kar je v protislovju z začetno predpostavko, da je ožina grafa vsaj 5. Potemtakem lahko na to vozlišče premaknemo lopova, ki preživi naslednjo potezo policistov.



Slika 5: Položaji policistov (modra vozlišča) in lopova (roza vozlišče).

Primer 2 Vsaj en policist je na razdalji 2 od lopova (slika 6). Množico vozlišč, sosednjih z v, na katerih se nahajajo policisti, označimo z X. Množico vozlišč, na katerih so policisti in so od v oddaljena za 2 povezavi, pa označimo z Y. Opazimo, da množica Y ni prazna. Če bi bili poljubni dve vozlišči, ki sta sosednji z vozliščem v in povezani z vozliščem iz Y, povezani z istim policistom (vozliščem v Y, bi dobili cikel dolžine 4, kar je v protislovju z začetno predpostavko. Torej lahko vsaki povezavi iz v, ki ne gre v X, nadaljuje pa se v Y, pripišemo svojega policista. Iz tega sledi, da obstaja bijekcija med številom povezav iz vozlišča v in številom policistov. Ker je stopnja vozlišča v vsaj $\delta(G)$, število policistov pa $\delta(G)$–1, mora obstajati še vsaj eno vozlišče v' sosednje z v, na katerem ni policista in ki ni povezano z vozliščem iz Y.. Če bi bilo vozlišče v' povezano z vozliščem iz X, bi nastal cikel dolžine 3. Na sosedih vozlišča v' ni policista, torej lopova lahko prestavimo na vozlišče v' in preživimo naslednjo potezo.



Slika 6: Množici X in Y, položaji policistov (modra vozlišča) in lopova (roza vozlišče).

Primer 3 Vsaj en policist je na razdalji 3 ali več od lopova. Le-ta ne vpliva na naslednji korak lopova, zato se problem prevede na Primer 1 ali Primer 2.

Prejšnji izrek nam omogoča, da dokažemo spodnjo mejo za policijsko število na Petersenovem grafu. Opazimo, da je ožina Petersenovega grafa enaka 5 in najmanjša stopnja 3, zato je po izreku

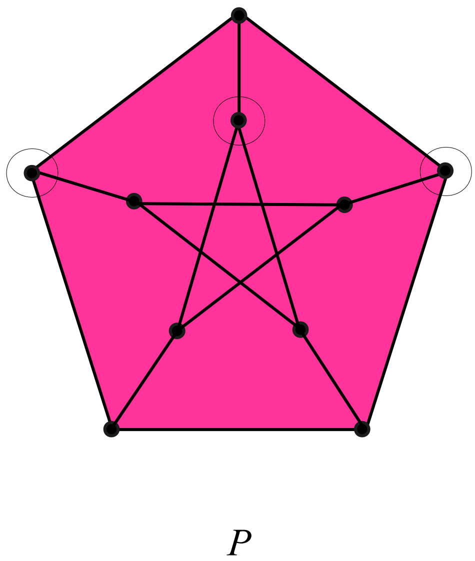
$$c(P) \geq 3.$$

Na sliki 7 vidimo, da obkrožena vozlišča Petersenovega grafa tvorijo dominantno množico, zato velja tudi neenakost

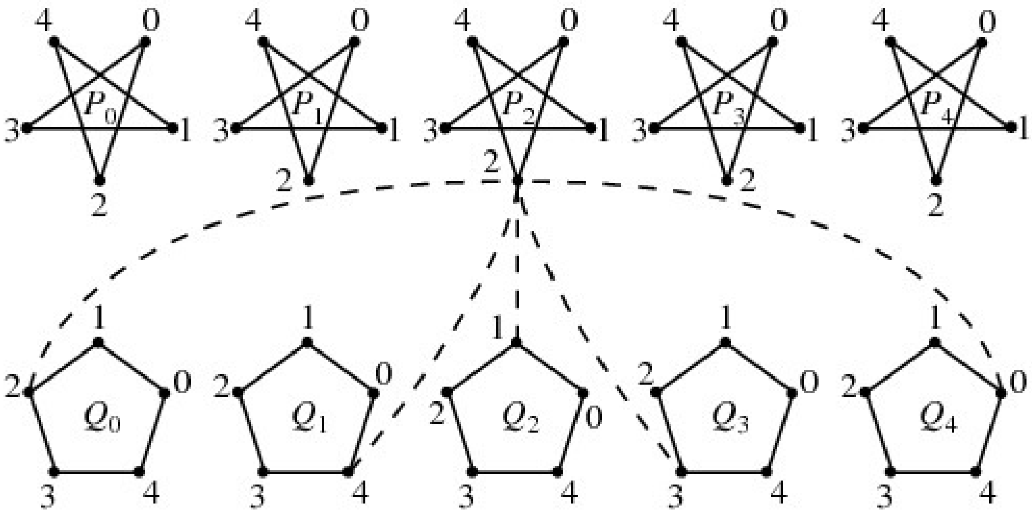
$$c(P) \leq 3.$$

Torej je policijsko število Petersenovega grafa enako 3.

Podobno se da pokazati, da je policijsko število Hoffman-Singletonovega grafa enako 7. (Spodnja meja je očitna, saj je ožina tega grafa enaka 5, dominantno množico pa lahko poiščemo, če si graf narišemo kot unijo desetih ciklov, ki so med seboj povezani na poseben način, glej sliko 8.



Slika 7: Dominantna množica v Petersenovem grafu.



Slika 8: Povezave iz ene zvezde Hoffman-Singletonovega grafa, vir slike: [5].

Literatura

[1] D. Bajc, T. Pisanski, *Najnujnejše o grafih*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana, 1985.

[2] D. B. West, *Introduction to Graph Theory, Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.

[3] R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Graphs An Introductory Approach*, John Wiley & Sons, Canada, 1990.

[4] A. Bonato, R. J. Nowakowski, *The Game of Cops and Robbers on Graphs*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011.

[5] *Hoffman-Singleton graph*, v: Wolfram MathWorld, [ogled 1. 8. 2019], dostopno na `http://mathworld.wolfram.com/Hoffman-SingletonGraph.html`

[6] A. Isaza, J. Lu, V. Bulitko, R.Greiner, *A cover-based approach to multi-agent moving target pursuit*, In: Proceedings of The 4th Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment, 2008

[7] *Cops and Robbers, Graph Search and Robotics*, dostopno na `https://users.auth.gr/kehagiat/Research/CopRob/index.htm`.