Problem pravičnega volilnega sistema

Katja Kozlevčar, Barbara Pal, Andraž Seničar
Mentorica: Živa Urbančič

Povzetek

Ukvarjali smo se z vprašanjem, kakšen volilni sistem je najbolj učinkovit in pravičen. Ameriški ekonomist Kenneth Arrow se je ukvarjal s tem problemom iz matematičnega stališča. Postavil je tri aksiome, katerih smo se med analizo držali. Med obravnavo tega problema smo prišli tudi do sklepa, da je volilni sistem, ki ustreza aksiomom, ki jih je postavil Arrow, diktatorski.

1 Uvod

Na MaRSu je vladal diktatorski sistem, zaradi katerega je prišlo do revolucije. Revolucionarji si želijo demokracije, vendar, kot Severna Koreja, nimajo z njo nobenih izkušenj. Zato MaRSovsko ljudstvo za pomoč prosi matematika, naj jim pomaga poiskati in uveljaviti najbolj pravičen volilni sistem. Ampak ali lahko obstaja pravičen volilni sistem, ne da bi bil hkrati tudi diktatorski? To vprašanje opisuje matematičen in socialno-ekonomski problem, ki izgleda enostaven, vendar vsebuje presenetljive zaključke. Ideja, ki jo predstavljamo, je zanimiva za večino politično-ekonomsko-matematično orientiranih entuziastov.

2 Kaj so volitve?

Volilci glasujejo tako, da vsak poda svoje mnenje glede na možnosti ali alternative, za katere glasuje. Po glasovanju se moramo na podlagi rezultatov odločiti za eno ali več alternativ, pri čemer si pomagamo z metodami odločanja. Volitve so sestavljene iz glasovanja in načina odločanja, ki skupaj določata kar bomo imenovali volilni sistem.

3 Volilni sistemi

3.1 Glasovanje

Pri glasovanju volilec poda svoje mnenje o določeni alternativi. To lahko stori na več načinov, kot so na primer:

- Standardo glasovanje:
  volilec izbere natanko eno izmed alternativ
- Preferenčno glasovanje:
  volilec po vrsti uredi alternative od njemu najljubše do najmanj ljube.
- Odobritveno glasovanje:
  volilec izbere vse alternative, ki jih je pripravljen podpreti.
- Točkovno glasovanje:
  volilec med alternative razdeli 100 točk, kjer večje število točk pomeni večjo podporo. Tukaj je možno narediti večje ali manjše razlike med kandidati kot v preferenčnem načinu glasovanja.

3.2 Načini odločanja

Po glasovanju se želimo na podlagi rezultatov odločiti o tem, katera alternativa je najboljša. To lahko storimo na več načinov:

- Metoda večine:
  preštejemo, katera alternativa prejme največ prvih mest. Tista z največjim številom zmaga.

- Metoda Run-off:
  preštejemo, katera alternativa prejme največ prvih mest. Če nobena izmed alternativ ne doseže vsaj polovice zmag, ponovimo volitve le z alternativama, ki sa imeli najvišje in drugo najvišje zmag.

- Metoda zaporedni Run-off:
  preštejemo, katera alternativa prejme največ prvih mest. Če nobena izmed alternativ ne doseže vsaj polovice zmag, izključimo alternativo z najmanj zmagami in ponovimo volitve. Ponavljamo, dokler neka alternativa nima vsaj polovice zmag.

- Metoda Borda count:
  Če imamo n alternativ, za vsak glas volilca (vrstni red alternativ) k-ti najslabši alternativi priredimo število $k-1$ (najslabša dobi 0, najboljša $n-1$). Za vsako alternativo seštejemo ta števila za vsa glasove. Zmaga alternativa z najvišjo vsoto.

- Metoda Condorcet:
  Če primerjamo pare alternativ, je zmagovalna tista alternativa, ki premaga katerokoli drugo v paru.

4 Poskus reševanja problema pravičnega volilnega sistema

4.1 Osnovne definicije in predpostavke

Preferenčno glasovanje je tip glasovanja, kjer vsak volilec i svoje mnenje poda z relacijo $>_i$, s katero vse alternative razvrsti od najboljše do najslabše. Natančneje:

- za poljubnega volilca i in vsak par različnih alternativ a, b velja bodisi $a >_i b$ bodisi $b >_i a$.

- za volilca i in vsako trojico alternativ a, b, c velja: če je $a >_i b$ in $b >_i c$, potem je $a >_i c$

V nadaljevanju bomo predpostavili, da bo način glasovanja preferenčno glasovanje.

Izraz "relativna pozicija"govori o odnosu med a in b, če odmislimo vse ostale alternative.

Recimo: če je volilni rezultat: $\ldots > a > x_1 > \ldots > x_i > b > \ldots$, potem je relativna pozicija a glede na b enaka $a > b$.

Izraz "diktatorski sistem" pomeni, da izid volitev v celoti odvisen od enega samega volilca. To pomeni, da če se volilec odloči, da bo $a >_i b$, bo tudi v končni razvrstitvi $a > b$.

4.2 Arrowov izrek in aksiomi

Izrek 1. *Arrowov izrek:*
Vsi sistemi s preferenčnim načinom glasovanja, za katere predpostavimo spodnje aksiome, so diktatorski, če le imamo vse alternative.

1. *Če velja, da je $a <_i b$ za vse volilce i, potem mora v končnem rezultatu veljati $a < b$.*

2. *Za relativni položaj a glede na b, alternativa ki ni enaka a ali b, ni pomembna.*

3. *Tranzitivnost: Če velja $a < b$ in $b < c$, potem velja tudi $a < c$.*

4.3 Dokaz

Dokaz je sestavljen iz štirih delov. Najprej oštevilčimo volilce s števili od 1 do N.

1. Najprej dokažimo, da za alternativo (imenujmo jo b), ki se pri vsakem volilcu nahaja na prvem ali zadnjem mestu, velja, da je tudi v končnem rezultatu na prvem ali zadnjem mestu.

   Predpostavimo, da obstajata alternativi a in c, da bo v končnem rezultatu veljalo $a > b > c$. S tem želimo ustvariti protislovje.

   Imamo dve skupini volilcev. Prvo skupino predstavljajo volilci, ki imajo b na prvem mestu, drugo skupino pa predstavljajo volilci, ki imajo b na zadnjem mestu. V prvi skupini premaknemo c na drugo mesto in pri drugi skupini premaknemo c na prvo mesto. S tem se relativna pozicija a glede na c ne spremeni, zato se bo v rešitvi novega volilnega rezultata odnos med a in c ohranil. Za obe skupini volilcev po premikih velja, da uvrščajo c pred a, zato mora biti v končnem rezultatu $c > a$. Ker je po naši začetni predpostavki zaradi tranzitivnosti $a > c$ in v našem končnem rezultatu $c > a$, pridemo do protislovja, ki smo ga želeli ustvariti, in s tem dokažemo prvi del dokaza.

2. Vzamemo primer, ko je alternativa b pri vseh volilcih na zadnjem mestu. Pri prvem volilcu b premaknemo na prvo mesto. Skličemo se na točko 1 in sklepamo, da bo po premiku alternativa b v končnem rezultatu na prvem ali zadnjem mestu. Če je b na prvem mestu, volilca 1 imenujemo mejni volilec. Če pa je b na zadnjem mestu, postopek ponovimo za drugega volilca in to ponavljamo dokler se b v končnem rezultatu ne pojavi na prvem mestu. Volilca, pri katerem se to zgodi, imenujemo mejni volilec. V nadaljevanju ga bomo poimenovali Bob.

   Razmislimo, da mejni volilec res obstaja. Če ne bi obstajal, bi prišli z menjavami do zadnjega volilca, pri katerem se rezultat še ne bi spremenil. Hkrati smo pri vseh volilci postavili b na prvo mesto in bi zaradi aksioma 1 moralo veljati, da je b v končnem rezultatu na prvem mestu. Prišli smo do dveh protislovnih trditev, torej predpostavka, da mejni volilec ne obstaja, ne drži.

3. Poskušali bomo dokazati, da je Bob diktator za alternativi a in c, kjer a in c nista enaka b. To pomeni, da bo v končnem rezultatu relativni položaj a in c tak, kot ga določi Bob.

   Pri tem uporabimo štiri različne profile glasovanj volilcev, ki jih prikazuje tabela 1.
   Profil 1: Vsi volilci pred Bobom postavijo b na prvo mesto, Bob in ostali za njim pa na zadnje, pri čemer je v končnem rezultatu b na zadnjem mestu.
   Profil 2: Vsi volilci pred Bobom vključno z njim samim postavijo b na prvo mesto, vsi za njim na zadnje, pri čemer pa je v končnem rezultatu b na prvem mestu.
   Profil 3: Zahtevamo le, da Bob postavi a višje od c.
   Profil 4: Spremenimo profil 3: Pri Bobu damo a na prvo in b na drugo mesto. Vsi volilci pred Bobom medtem postavijo b na prvo mesto, vsi za njim pa na zadnje. Iz profila 3 na profil 4 ne spremenimo končnega reultata za a in c.

   V profilu 4 je za Boba in vse kasneje $a >_i b$, za vse pred Bobom pa je $a <_i b$. S pomočjo profila 1 bomo dokazali, da je $b < a$. Začnemo s tem, da primerjamo profila 1 in 4. Za profil 1 vemo, da je v končnem rezultatu $b < a$, hkrati pa se relativna pozicija a glede na b med profiloma 1 in 4 ne razlikuje. S tem smo dokazali, da je v končnem rezultatu za profil 4 $a > b$.
   S podobnim postopkom s primerjavo profilov 2 in 4 ugotovimo, da je v končnem rezultatu za profil 4 $b > c$. Zaradi aksioma 3 lahko dokažemo, da je za profil 4 $a > c$. Iz profila 3 na profil 4 nismo spremenili rela-

	1	2	3	...	Bob-1	Bob	Bob+1	...	N		Rešitev
Profil 1	b na prvem mestu					b na zadnjem mestu					b-zadnje mesto
Profil 2	b na prvem mestu						b na zadnjem mestu				b-prvo mesto
Profil 3						$c <_{Bob} a$					Relativna pozicija *a* in *c* je enaka.
Profil 4	b na prvem mestu					1. a 2. b	b na zadnjem mestu				

Slika 1: Tabela nam pomaga pri dokazu, da je za profil 3 v končni razvrstitvi $c < a$. Dokaz ločimo na dva dela. Najprej primerjamo profila 1 in 4 in dokažemo, da za profil 3 velja $b < a$. Nato primerjamo profila 2 in 4 in dokažemo, da za profil 3 velja, da je $c < b$.

tivne pozicije a in c, zato velja, da je tudi v končnem rezultatu profila 3 $a > c$.

Profil 3 predstavlja katerikoli volilni izid kjer Bob postavi a pred c. Na podlagi le-te predpostavke smo dokazali, da je tudi v rešitvi a višje od c, zato pridemo do sklepa, da je Bob diktator za relativni položaj a glede na c kjer a in c nista enaka b.

4. Vse, kar moramo še dokazati, je, da je Bob diktator za položaj b, torej da določi, ali je b večji od a za vsako alternativo $a \neq b$. Vzemimo alternativo c, ki ni enaka b ali a. Prav tako kot za b, imamo mejnega volilca za c, ki ga poimenujemo Cene. Cene je diktator za relativni položaj a in b, kar lahko sklepamo iz točke 3 našega dokaza. To pomeni, da mnenje drugih za položaj a in b ni pomembno. A potem Bobovo mnenje ne bi smelo vplivati na rezultat. Vendar ker je Bob mejni volilec za b, je včasih njegovo mnenje pomembno za položaj b. Iz tega sledi, da Bob in Cene morata biti ista oseba.

Torej je Bob diktator.

5 Zaključek

Kljub temu, da ugotovitev, ki je zapisana v Arrowovem izreku, velja le za preferenčni način glasovanja, je rezultat presenetljiv. Zanimivo bi bilo raziskati drugačne načine glasovanja v kombinaciji z različnimi načini odločanja, kar pa je lahko tema za naslednji MaRS.

Literatura

[1] *The Mathematics of Voting*, v: Center of Academic Succes, University of Alabama, [ogled 14. 8. 2017], dostopno na `http://www.ctl.ua.edu/math103/voting/mathemat.htm`.

[2] *Voting and Elections*, v: American Mathematical Society, [ogled 14. 8. 2017], dostopno na `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voting-introduction`.

[3] *Arrow's Impossibility Theorem*, v: Social Science Computing Cooperative, [ogled 14. 8. 2017], dostopno na `http://www.ssc.wisc.edu/~dquint/econ698/lecture%202.pdf`.