Neskončnosti

Nino Cajnkar, Ana Meta Dolinar, Bor Grošelj Simić
Mentor: David Popović

5. - 11. avgust 2018

Povzetek

Pri našem projektu smo se ukvarjali z neskončnostjo. Pokazali smo, da poleg števne neskončnosti obstaja še neskončno mnogo ostalih neskončnosti in ugotavljali, katere so si enake ter katere se med seboj razlikujejo. Na koncu smo dokazali Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek, ki nam pove, da če med dvema množicama v obeh smereh obstaja injektivna funkcija, imata množici enako moč.

1 Potrebne definicije

Med najosnovnejšimi in za naš projekt najpomembnejšimi lastnostmi so injektivnost, surjektivnost ter bijektivnost funkcij.

Definicija 1. *Funkcija $f: A \to B$ je predpis, ki priredi elementu $x,\ x \in A$ natanko en element $f(x) \in B$.*

Definicija 2. *Funkcija $f: A \to B$ je injektivna takrat, ko preslika različne elemente $x,\ x \in A$ v različne elemente $y,\ y \in B$ oziroma ko velja*

$$\forall x_1, x_2 \in A: \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definicija 3. *Funkcija $f: A \to B$ je surjektivna takrat, ko je vsak element $y,\ y \in B$ slika nekega elementa $x,\ x \in A$ oziroma ko velja*

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y.$$

Definicija 4. *Funkcija $f: A \to B$ je bijektivna takrat, ko je injektivna in surjektivna. Bijektivni preslikavi rečemo tudi bijekcija.*

Definicija 5. *Z $[n]$ označimo množico $\{1, 2, \cdots, n\}$.*

Definicija 6. *Za funkcijo $f: A \to B$ in podmnožici $S \subset A$ in $T \subset B$ definiramo sliko*

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

in prasliko

$$f^{-1}(T) = \{a \mid f(a) \in T\}.$$

Definicija 7. *Moč končne množice A je število elemntov $x, x \in A$.*

Moč množice (kardinalnost) je merilo za merjenje števila elementov v množici oziroma za njeno velikost. Moč te množice se izraža s kardinalnim številom. Kardinalnost dveh množic lahko primerjamo z uporabo kardinalnih števil ali pa z uporabo bijektivnosti in injektivnosti. Moč množice A se označi s $|A|$ in za končne množice pomeni število elementov v A.

Definicija 8. *Množici A in B imata enako moč, če med njima obstaja bijekcija $f: A \to B$.*

Definicija 9. *$|A| \leq |B|$ velja natanko takrat, ko obstaja neka injektivna preslikava $f: A \to B$.*

2 Števne množice

Definicija 10. *Množica A je končna, če obstaja $n \in \mathbb{N}_0$ in bijekcija $f : A \to [n]$.*

Trditev 1. *Naj bo $S \subset \mathbb{N}$. Potem je množica S končna ali obstaja bijekcija $S \to \mathbb{N}$.*

Dokaz. Množico S uredimo po velikosti. Vemo, da najmanjše število v S obstaja, označimo ga s S_1 in ga preslikamo v 1:

$$s_1 \mapsto 1.$$

Sedaj pogledamo $S \setminus \{s_1\}$. Če je $\emptyset$, potem imamo bijekcijo $s \to [1]$, drugače pa obstaja najmanjši element v $S \setminus \{s_1\}$, ki ga označimo s s_2, katerega nato preslikamo v število 2:

$$s_2 \mapsto 2.$$

Nato pogledamo $S \setminus \{s_1, s_2\}$ in nadaljujemo postopek.
Če po končnem številu korakov dobimo $S \setminus \{s_1, \cdots, s_n\} = \emptyset$, potem imamo bijekcijo $S \mapsto [n]$, drugače pa se postopek ponavlja v neskončnost in z njim konstruiramo bijekcijo $S \to \mathbb{N}$. □

S tem smo dokazali, da je neskončnost $\mathbb{N}$ najmanjša mogoča neskončnost. Moč množice naravnih števil označimo z $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Definicija 11. *Množica A je števna, če je A končna ali če obstaja bijekcija $f : A \to \mathbb{N}$.*

Trditev 2. *Množica $\mathbb{N}_0$ je števna množica.*

Dokaz. Definiramo funkcijo $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ s predpisom $n \mapsto n + 1$ za vse $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Pokažimo, da je funkcija injektivna:

$$f(x) = f(y) \implies x + 1 = y + 1 \implies x = y.$$

Pokažimo, da je funkcija surjektivna. Ker za vsak $y \in \mathbb{N}$ velja $f(y - 1) = y$ in je $y - 1 \in \mathbb{N}_0$, je funkcija f surjektivna.
Funkcija je tako injektivna kot surjektivna, zato je tudi bijektivna. □

Trditev 3. *Množica naravnih števil* $\mathbb{N}$ *ima enako moč kot množica celih števil* $\mathbb{Z}$.

Dokaz. Da bi dokazali, da sta moči množic $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ enaki, moramo med njima poiskati bijekcijo. Definirajmo to funkcijo kot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ s predpisom

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \mid \quad n = 1 \\ -\frac{n-1}{2} & \mid \quad n \text{ liho število, ki ni } 1 \\ \frac{n}{2} & \mid \quad n \text{ sodo} \end{cases}$$

Prepričajmo se, da je funkcija dobro definirana. Število 0 je celo število, $\frac{n}{2}$ je tudi celo število za sodi n. Tudi $-\frac{n-1}{2}$ je celo število za lihe n, torej f res slika v množico celih števil $\mathbb{Z}$.
Pokažimo, da je funkcija f injektivna. Kot slika funkcije f je $\frac{n}{2}$ vedno strogo pozitivno, $-\frac{n-1}{2}$ pa vedno strogo negativno. Ker sta to nekonstantni linearni funkciji, je f injektivna tudi znotraj sodih in lihih števil. Torej je f res injektivna.
Pokažimo še, da je funkcija f surjektivna. Za $n = 1$ dobimo $f(1) = 0$. Slike sodih števil so ravno množica pozitivnih celih števil, slike lihih števil, večjih od 1, pa predstavljajo množico negativnih celih števil. Unija teh dveh množic in števila 0 je celotna množica celih števil, zato je f surjektivna.
Ker je funkcija f tako injektivna kot surjektivna, je bijektivna. □

S tem smo pokazali, da je moč množice naravnih števil $\mathbb{N}$ enaka moči množice celih števil $\mathbb{Z}$.

Trditev 4. *Kartezični produkt množice naravnih števil same s sabo* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je števna množica.*

Dokaz. Funkcija $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ preslika elementa $(a, b) \mapsto 2^a \cdot 3^b$ za $a, b \in \mathbb{N}$. Pokažimo, da je funkcija injektivna. Naj bo $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{N}^2$. Potem velja

$$f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2)) \implies 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \implies$$
$$\implies a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2 \implies (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

zaradi enoličnosti razcepa na praštevila. Torej je funkcija f injektivna. Z uporabo trditve 1 lahko zaključimo, da obstaja tudi bijekcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. □

3 Večje neskončnosti

Trditev 5. *Obstaja bijektivna funkcija* $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$.

Dokaz. Vemo, da obstaja bijekcija $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ (primer takšne funkcije je $f(x) = \tan x$. To nam pove, da $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$, dokazati pa želimo $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$.
Zadošča torej dokazati, da obstaja bijekcija $g : (0, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pogojem ustreza npr. funkcija $g(x) = \frac{\pi}{2} - \pi x$. □

Izrek 1. *Ne obstaja bijekcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$.

Izrek bomo dokazali s protislovjem. Pri tem bomo uporabili t.i. Cantorjev diagonalni argument. Georg Cantor je bil matematik, znan kot začetnik teorije množic. Različico njegovega dokaza bomo v naši nalogi še večkrat uporabili.

Dokaz. Recimo, da bijekcija obstaja. Vemo, da je moč množice $\mathbb{R}$ enaka moči intervala $(0, 1)$, zato mora obstajati tudi bijekcija $(0, 1) \to \mathbb{N}$. To pomeni, da lahko vsa realna števila s tega intervala oštevilčimo in jih postavimo v vrsto. Vemo tudi, da je decimalni zapis realnega števila enoličen (z izjemo tistih, ki se končajo s periodo 9 - v tem primeru se vedno odločimo za možnost s končnim številom decimalk). Zapisali smo torej vsa realna števila na intervalu med 0 in 1.

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0, d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\dots \\
r_2 &= 0, d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\dots \\
r_3 &= 0, d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\dots \\
r_4 &= 0, d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\dots \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Definirajmo število $r \in (0, 1)$ kot

$$r = 0, q_1q_2q_3q_4\dots,$$

kjer je

$$q_i = d_{ii} + 7 \pmod{10},$$

od koder sledi

$$q_i \neq d_{ii} \quad \forall i.$$

To pomeni, da se bo število r od vsakega realnega števila na seznamu razlikovalo vsaj v eni decimalki. Ker pa $r \in (0, 1)$, bi po naši predpostavki, da smo zapisali vsa števila s tega intervala, moral biti na seznamu. Tako smo prišli do protislovja, kar pomeni, da bijekcija $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$ ne more obstajati. □

Posledica 1. *Niso vse neskončnosti enako velike.*

Dokaz. Obstaja injektivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definirana kot $f(n) = n$. Ker zaradi tega kardinalnost množice $\mathbb{R}$ ni manjša od $|\mathbb{N}|$ in po zgornjem izreku moči množic nista enaki, velja $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. To pomeni, da mora obstajati neskončnost, večja od $|\mathbb{N}|$. □

Tako naravnih kot tudi realnih števil je neskončno mnogo, a smo ravno dokazali, da se ti dve neskončnosti razlikujeta (druga je večja od prve). Zanimivo je, da se ne da dokazati, ali je med tema dvema neskončnostima vmes še kakšna (množica z močjo $m, |\mathbb{N}| < m < |\mathbb{R}|$). Ne glede na to, ali kot aksiom vzamemo, da obstaja, ali pa, da vmesne neskončnosti ni, ne bomo naleteli na protislovje. Temu pravimo *hipoteza kontinuuma.*

Trditev 6. *Množica vseh realnih zaporedij* $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *ima enako moč kot množica vseh realnih števil.*

Dokaz. Trditev $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ je ekvivalentna trditvi $|(0,1)^{\mathbb{N}}| = |(0,1)|$, saj smo s trditvijo 5 dokazali, da $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$. Dovolj je, da najdemo bijekcijo $f : (0,1)^{\mathbb{N}} \to (0,1)$.
Naj bo $r_1, r_2, r_3, ...$ zaporedje realnih števil iz intervala $(0,1)$.

$$r_1 = 0, d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}...$$
$$r_2 = 0, d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}...$$
$$r_3 = 0, d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}...$$
$$r_4 = 0, d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}...$$

Definiramo $r = 0, d_{11}d_{12}d_{21}d_{13}d_{22}d_{31}d_{14}\ldots$, kot je prikazano na sliki 3. Na takšen način lahko iz kateregakoli realnega zaporedja na intervalu $(0,1)$ dobimo novo realno število s tega intervala, ki to zaporedje enolično določa, torej gre res za bijekcijo. □

Trditev 7. *Naj bo množica S množica vseh končnih podmnožic množice naravnih števil. Potem je množica S števna.*

Dokaz. Poiščimo injektivno preslikavo $f : S \to \mathbb{N}$.
Za končno podmnožico naravnih števil $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ naj bo $f(A) = p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdot p_{a_3} \cdot \ldots \cdot p_{a_n}$, pri čemer je p_{a_i} i-to najmanjše praštevilo. Iz enoličnosti praštevilskega razcepa sledi, da je funkcija res injektivna. Ker je zmnožek samih praštevil vedno naravno število, je funkcija f tudi dobro definirana. □

Ugotovili smo, da je množica vseh končnih podmnožic $\mathbb{N}$ števna. V naslednjem primeru obravnavamo množico vseh podmnožic $\mathbb{N}$, tudi neskončnih - torej potenčno množico naravnih števil.

Trditev 8. *Ne obstaja bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Dokaz. Izrek bomo podobno kot prej dokazali s protislovjem.
Recimo, da bijekcija obstaja. To pomeni, da lahko vse podmnožice naravnih števil (torej vse elemente množice $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) oštevilčimo. Po vrsti (glede na oštevilčenje) zapišimo seznam vseh podmnožic: $S_1, S_2, S_3, \dots$ Poglejmo podmnožico $S_i = \{n \in \mathbb{N} \quad | \quad n \notin S_n\}, i \in \mathbb{N}$.
Če $i \in S_i$, bi moralo zanj kot element te množice veljati, da $i \notin S_i$. Če pa $i \notin S_i$, bi moral zaradi tega biti v tej množici. To nas pripelje v protislovje. Tako smo dobili podmnožico naravnih števil, ki se razlikuje od vseh iz seznama. Vendar pa smo predpostavili, da so zapisane vse podmnožice. To pomeni, da bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne more obstajati. □

Izrek 2. *Ne obstaja surjektivna funkcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$.*

Dokaz. Posplošimo zgornji dokaz za primer $A = \mathbb{N}$. Pri dokazu bomo uporabili protislovje.
Naj obstaja surjektivna funkcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Vsako množico, ki je element $\mathcal{P}(A)$, označimo z $S_a, a \in A$, da $f(a) = S_a$. Poglejmo množico $S = \{a \quad | \quad a \notin S_a\}$. Iz tega neposredno sledi, da $S \neq S_a$, saj je element a v natanko eni izmed obeh. Ker pa $S \neq S_a \quad \forall a$, množica S ne bi smela biti na seznamu oz. ne bi smela biti element $\mathcal{P}(A)$, saj bi sicer bila označena. Vendar pa vsebuje le elemente množice A, torej je element njene potenčne množice, kar nas vodi v protislovje.
Naša začetna predpostavka tako ne more biti pravilna. Zato $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. □

Posledica 2. *Obstaja neskončno mnogo različnih neskončnosti.*

Dokaz. Če bi obstajala množica z močjo, enako največji izmed neskončnosti, ne bi mogla imeti potenčne množice. Sledi, da nobena neskončnost ni največja, torej jih mora biti neskončno mnogo. □

4 Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek

Izrek 3. *Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to A$ injektivni funkciji. Potem obstaja bijektivna funkcija $h : A \to B$.*

Dokaz. Definirajmo

$$B_0 = B \setminus f(A)$$
$$B_1 = (f \circ g)(B_0)$$
$$B_2 = (f \circ g)(B_1)$$

In v bolj splošni obliki

$$B_n = (f \circ g)(B_{n-1}) = (f \circ g)^n(B_0).$$

Definirajmo še

$$B^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Iz tega sledi, da lahko definiramo bijektivno funkcijo $h : A \to B$ s predpisom

$$h(a) = \begin{cases} g^{-1}(a) & \mid a \in g^{-1}(B^*) \\ f(a) & \mid a \notin g^{-1}(B^*). \end{cases}$$

Sedaj moramo dokazati, da je funkcija h dobro definirana in bijektivna.
Če $a \in g^{-1}(B^*)$, potem obstaja $b \in B^*$, tako da velja $a = g(b)$ in posledično $b = g^{-1}(a)$. Ta b je enolično določen, ker je funkcija g injektivna, torej je funkcija h dobro definirana.
Za dokaz injektivnosti moramo obravnavati dva primera. Če velja $a_1, a_2 \in g^{-1}(B^*)$ ali $a_1, a_2 \notin g^{-1}(B^*)$, potem $h(a_1) = h(a_2)$ očitno pomeni $a_1 = a_2$.
V nasprotnem primeru, torej če $a_1 \in g^{-1}(B^*)$ in $a_2 \notin g^{-1}(B^*)$, predpostavimo, da velja $h(a_1) = h(a_2)$. Potem velja $g^{-1}(a_1) = f(a_2)$. Vidimo torej, da $f(a_2)$ pripada B^*. Naj bo $f(a_2) = b$ za nek $b \in B_n$. Definirajmo $b' \in B_{n-1}$, tako da velja $b = f(g(b'))$. Sledi, da je $f(a_2) = f(g(b'))$, torej je zaradi injektivnosti $a_2 = g(b')$, kar je protislovje, saj smo na začetku določili, da $a_2 \notin g^{-1}(B^*)$.
Sedaj moramo dokazati še surjektivnost funkcije h. Vsak $b \in B$ mora biti slika najmanj enega elementa iz množice A in pripada natanko eni izmed množic B^* in $B \setminus B^*$. Če pripada B^*, potem velja $h(g(b)) = b$ in je b slika $g(b)$, drugače pa velja $h(f^{-1}(b)) = b$, torej je b slika $f^{-1}(b)$. □

Trditev 9. *Potenčna množica naravnih števil je po moči enaka množici realnih števil.*

Dokaz. Po Cantor-Schröder-Bernsteinovem izreku zadošča poiskati injektivno preslikavo $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ in injektivno preslikavo $g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Kot funkcijo f si lahko izberemo predpis, ki vsaki množici naravnih števil S priredi realno število r na sledeč način:

$$r = 0, q_1 q_2 q_3 q_4 \dots,$$

kjer naj bo vsaka decimalka

$$q_i = \begin{cases} 0 & | \quad i \notin S \\ 1 & | \quad i \in S. \end{cases}$$

Takšen zapis je za različne podmnožice različen, saj bi sicer enke na točno istih mestih implicirale točno isti množici. Funkcija je tudi dobro definirana, saj je ničla, ki ji za decimalno vejico sledi neko zaporedje decimalk, realno število.
Zdaj potrebujemo še funkcijo g. Ker smo dokazali $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, je enakovredno poiskati injektivno funkcijo $h : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Realno število najprej pretvorimo v dvojiški sestav. Če je na i-tem mestu enica, naj bo število i element množice, ki je slika tega realnega števila, sicer pa ne. Pri tem mesta levo od decimalne vejice štejemo s pozitivnimi števili, za njo pa z negativnimi celimi števili. Slika bo vedno množica, ki bo vsebovala sama cela števila, torej bo element $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Zato funkcija je dobro definirana. Res je tudi injektivna, saj različnim številom nikoli ne bo priredila istih množic.
Poiskali smo injektivni funkciji v obeh smereh med množicama, torej mora obstajati tudi bijekcija $\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}$. $\square$

Literatura

[1] *Encyclopedia Britannica. Georg Cantor.* [internet]. [citirano 9. 8. 2018]. Dostopno na naslovu: `https://www.britannica.com/biography/Georg-Ferdinand-Ludwig-Philipp-Cantor`.