Madžarska metoda z utežmi

Ema Leila Grošelj, Lucija Matijašić, Živa Kocijan
Mentor: Jakob Svetina

Povzetek

V članku se dotaknemo teorije grafov. Nato definiramo in utemeljimo madžarsko metodo z utežmi ter zaključimo s primeri rešenih nalog različnih težavnosti in glavno nalogo, s katero pomagamo rešiti svet.

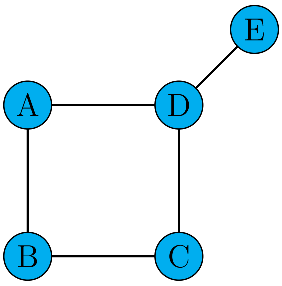
1 Uvod

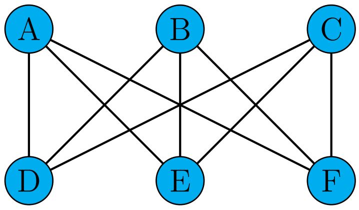
Vsak dan sprejemamo različne odločitve in redko pomislimo, da bi nam pri nekaterih matematika lahko prišla prav. Madžarska metoda z utežmi je vsekakor koristna in nam omogoči, da v določenih situacijah zagotovo izberemo najcenejšo ali najboljšo možnost. S pomočjo MMU smo tako izbrali najhitrejšo plavalno skupino in pomagali Maščevalcem pri reševanju sveta. Poleg tega smo spoznali osnove teorije grafov, ki nam je prišla prav pri razumevanju MMU.

2 Teorija grafov

Definicija 1. ***Graf*** *je urejen par $G = (V, E)$, kjer je V neprazna množica točk oziroma* ***vozlišč****, E pa množica* ***povezav****. Vsaka povezava je množica dveh različnih vozlišč.*

Graf je sestavljen iz točk, imenovanih vozlišča, nekatera od njih pa so med seboj povezana.



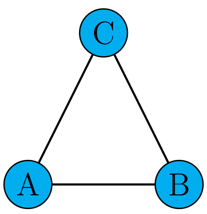


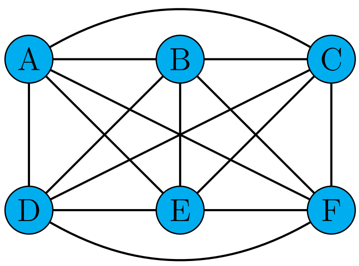
Slika 1: Primera grafov.

2.1 Polni grafi

Definicija 2. *Poln graf je graf, kjer je vsako vozlišče povezano z vsakim drugim vozliščem.*

Z drugimi besedami: za izbrano vozlišče so vsa ostala vozlišča sosednja, oz. vsa vozlišča so med seboj povezana. To se vidi na naslednjih primerih:



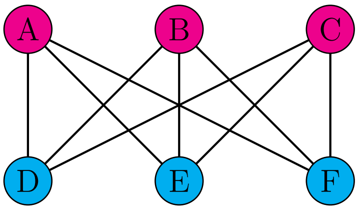


Slika 2: Primera polnih grafov.

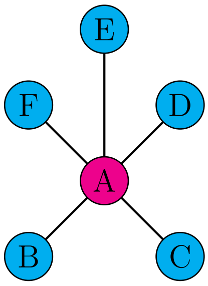
3 Dvodelni grafi

Definicija 3. *Če obstajata množici X in Y, da je $X \cup Y = V(G)$ in ima vsaka povezava $e \in E(G)$ eno krajišče v X in drugo v Y, je graf **dvodelen**.*

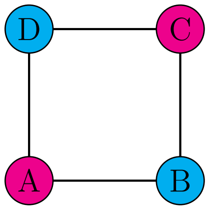
Torej med vozlišči v množici X ni povezav. Prav tako ni povezav med vozlišči v množici Y. Za dvodelen graf rečemo, da je dvoobarljiv, kar se vidi iz naslednjih primerov:



Slika 3: Graf $K_{3,3}$.



Slika 4: Graf $K_{1,5}$.



Slika 5: Graf $K_{2,2}$.

3.1 Lastnosti dvodelnih grafov:

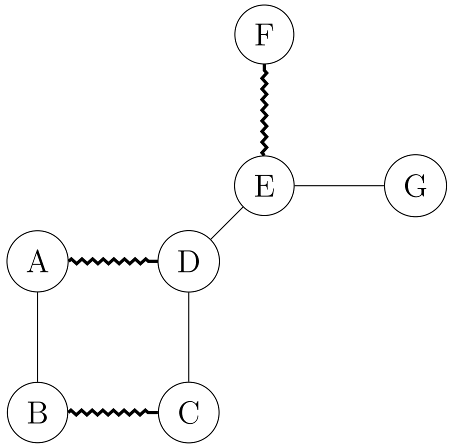
- graf, ki nima lihih ciklov, je dvodelen.
- ciklični graf s sodim številom vozlišč je dvodelen.
- graf je dvodelen, če se ga lahko obarva z dvema barvama (kromatično število je manjše ali enako 2).

4 Prirejanje

Definicija 4. *Graf $G = (V, E)$ naj bo poljuben neusmerjen graf. $M \subseteq E$ je **prirejanje** grafa G, če povezave iz M nimajo skupnih krajišč.*

V grafu G lahko glede na neko izbrano povezavo izberemo drugo povezavo, če se ti ne stikata v nobenem krajišču, in s tem gradimo prirejanje.

Definicija 5. *Problem največjega prirejanja:*
Dan je neusmerjen graf G. Poišči prirejanje v grafu G z največjo močjo.



Slika 6: Prikaz največjega prirejanja v grafu.

5 Definicija madžarske metode za dvodelne grafe z utežmi

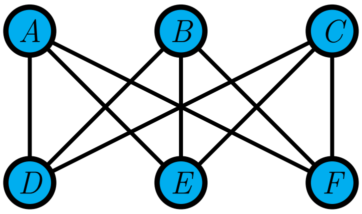
Z madžarsko metodo za dvodelne grafe z utežmi smo se najprej spoznali na nekaj lažjih primerih. Nato smo definirali problem najcenejšega popolnega prirejanja v polnem dvodelnem grafu.

Definicija 6. *Problem najcenejšega popolnega prirejanja v polnem dvodelnem grafu.*

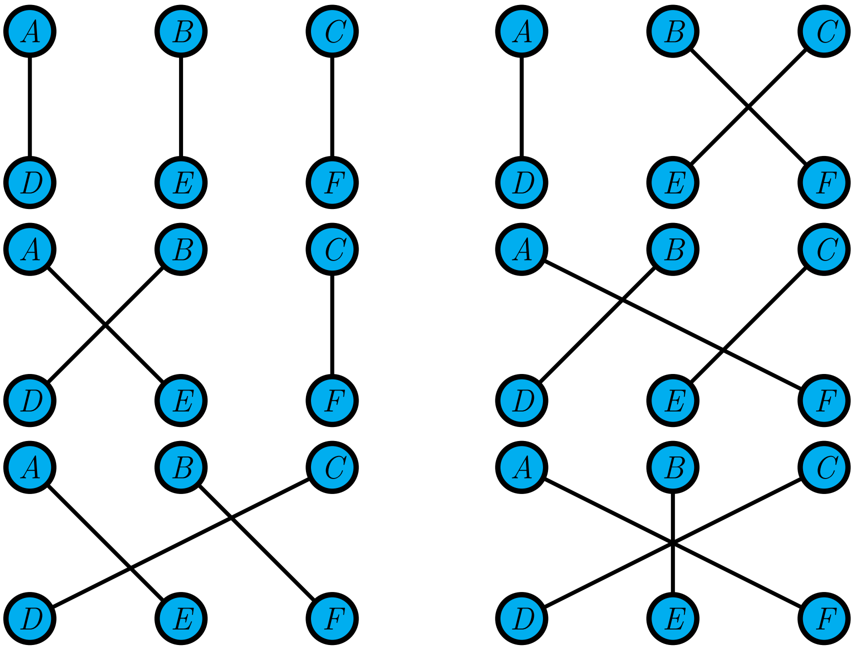
- *Podatki:*
  - *Poln dvodelen graf* $G \cong K_{n,n}$, $V(G) = X \cup Y$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$
  - *Matrika cen povezav* $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *kjer* $c_{i,j}$ *pomeni ceno povezave* x_i, y_j
- *Iščemo:*
  - *Popolno prirejanje* M *v* G *z najmanjšo ceno:*

$$c(M) = \sum_{x_i y_j \in E(G)} c_{i,j}.$$

Zgled 1. • *Pogledali smo si graf $K_{3,3}$:*

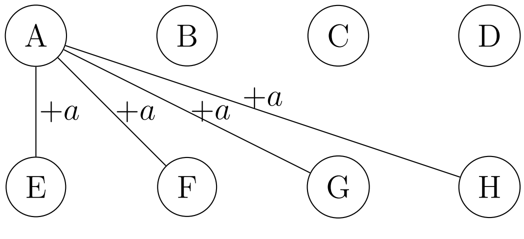


- *Spoznali smo, da ima graf $K_{n,n}$ $n!$ popolnih prirejanj. Za naš graf $K_{3,3}$ jih torej obstaja 6:*



Trditev 1. *Naj bo $A \in V(G)$ in $a \in \mathbb{R}$. Če ceni vsake povezave s krajiščem v A prištejemo a, se množica najcenejših popolnih prirejanj ne spremeni.*

Dokaz 1. *Ker vsako popolno prirejanje vsebuje natanko eno povezavo s krajiščem v A, se vsakemu od njih cena spremeni za a. Torej se množica optimalnih rešitev ohrani.*



Slika 7: Skica dokaza.

Posledica 1. *Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:*

1. *Če vsakemu elementu i-te vrstice matrike C prištejemo a, se množica optimalnih rešitev ne spremeni.*

2. *Če vsakemu elementu j-tega stolpca matrike C prištejemo a, se množica optimalnih rešitev ne spremeni.*

6 Postopek madžarske metode z utežmi

Naloge smo reševali po naslednjem postopku:

1. korak:
   - Od elementov vsake vrstice matrike C odštejemo najmanjši element vrstice.
   - Od elementov vsakega stolpca matrike C odštejemo najmanjši element stolpca.

2. korak:
   - Pogledamo, če v matriki C lahko izberemo n mest, tako da velja:
     (a) Na izbranih mestih so ničle.
     (b) V vsaki vrstici in vsakem stolpcu matrike C je natanko eno izbrano mesto.
   - Sicer izberemo množico P vrstic in/ali stolpcev matrike C, tako da velja:
     (a) $|P| < n$.
     (b) Vrstice in stolpci iz množice P skupaj pokrijejo vse ničelne elemente v matriki C.

   Definicija 7. *Element $c_{i,j}$ je:*

   - ***pokrit***, *če velja $v_i \in P$ ali $s_j \in P$.*
   - ***dvakrat pokrit***, *če velja $v_i \in P$ in $s_j \in P$.*
   - ***nepokrit***, *če velja $v_i \notin P$ in $s_j \notin P$.*

	Stolpci v P	
Vrstice v P	Dvakrat pokriti elementi	Pokriti elementi
	Pokriti elementi	Nepokriti elementi

3. korak
   - Naj bo ε najmanjši nepokriti element matrike C:
     - Vse nepokrite elemente zmanjšamo za ε.
     - Vse dvakrat pokrite elemente povečamo za ε.
4. korak
   - Če se da izbrati ničle, kot je to opisano v 2. koraku, se metoda konča.
   - V tabeli izberemo elemente, ki so na mestih izbranih ničel, in jih seštejemo, da dobimo najcenejše prirejanje.
   - Sicer se vrnemo na 2. korak.

7 Utemeljitev pravilnosti madžarske metode z utežmi

1. korak: Množica optimalnih rešitev se po pomožni trditvi ohrani. Po tem koraku je vsak $c_{i,j} \geq 0$ in v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu je vsaj ena ničla.
2. korak: Kaj izberemo v matriki C?
   (a) Bodisi n ničel; v vsaki vrstici in vsakem stolpcu natanko eno.
   (b) Bodisi manj kot n vrstic in/ali stolpcev, ki pokrijejo vse ničle v matriki C.

   Ali je mogoče, da niti (a) niti (b) ne uspe?

Definicija 8. *: Ničelni graf H*

$$V(H) = V(G) = \{v_1, \ldots, v_n, s_1, \ldots, s_n\}$$

Pri čemer v pomeni vrstico, s pa stolpec.

$$E(H) = \{v_i s_j; c_{i,j}\}$$

V grafu H z madžarsko metodo poiščemo največje prirejanje M in najmanjše pokritje P, kjer je $|M| = |P|$.

(a) $|M| = n$: *M je popolno prirejanje v graf H s ceno 0, torej je M najcenejše popolno prirejanje v G.*

(b) $|M| < n$: *Potem je tudi* $|P| < n$. *Torej je P množica manj kot n vrstic in/ali stolpcev matrike C, ki pokrije vse ničle v C.*

3. korak: Vsi nepokriti elementi so večji od nič, zato je tudi njihov najmanjši element $\varepsilon > 0$. Po tem koraku so še vedno vsi $e_{i,j} \geq 0$. Ta korak lahko interpretiramo tako:

   (a) vsem vrsticam v P prištejemo ε,

   (b) od vseh stolpcev zunaj P odštejemo ε.

	Stolpci v P	
Vrstice v P	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$ in $-\varepsilon$
	$+\varepsilon$ in $-\varepsilon$	$-\varepsilon$

Po pomožni trditvi se torej množica optimalnih rešitev ohrani.

7.1 Zaključek:

Če se MMU ustavi/konča, dobimo najcenejše popolno prirejanje v G glede na C.

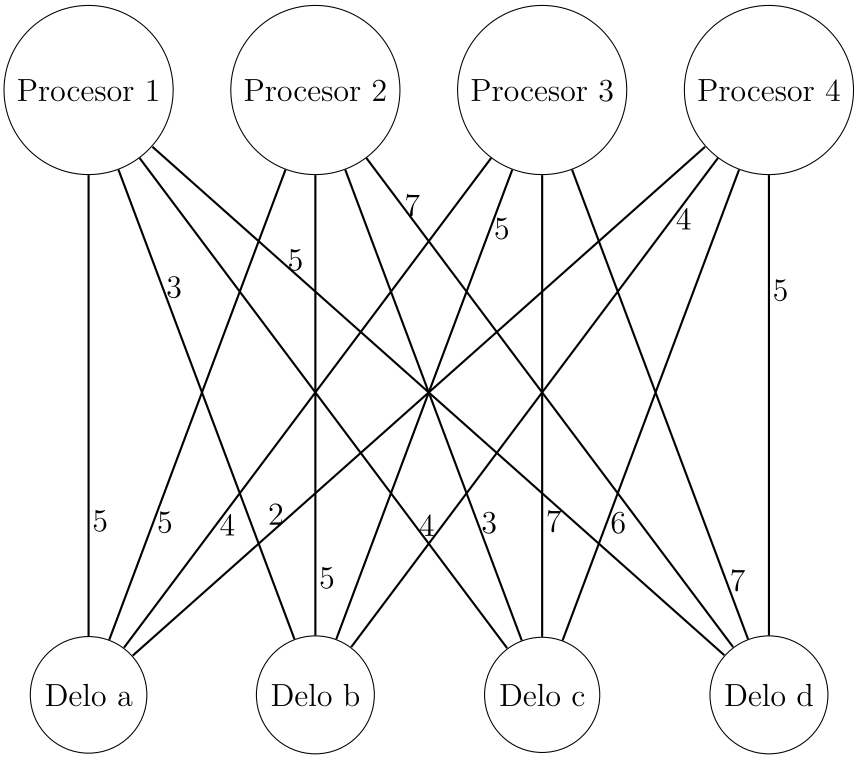
8 Primeri uporabe MMU

8.1 Enostaven primer MMU

Najprej smo spoznali enostaven primer MMU. V nalogi morajo štirje procesorji opraviti štiri različna dela. Dana je tabela cen za opravljena posamezna dela. Cilj naloge je bil dodeliti dela procesorjem tako, da bo skupna cena za delo najnižja.

	Delo a	Delo b	Delo c	Delo d
Procesor 1	5	3	4	6
Procesor 2	5	5	3	7
Procesor 3	4	5	7	6
Procesor 4	2	4	6	5

Tabela 1: Tabela enostavnega primera MMU.



Slika 8: Graf tabele enostavnega primera.

- Tabeli enostavnega primera MMU smo v prvem koraku priredili matriko:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- Nato smo odšteli najmanjšo vrednost v posamezni vrstici od cen v tej vrstici (v prvi 3 . . .):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- V tretjem koraku smo odšteli še najmanjše vrednosti v stolpcih:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- V četrtem koraku smo pokrili vrstice in stolpce z ničlami in izbrali najmanjši nepokrit element $\varepsilon = 1$. Nepokritim vrednostim smo odšteli ε, enkrat pokrite vrednosti nismo spremenili in dvakrat pokritim vrednostim smo prišteli ε:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Vsakemu procesorju smo na matriki s pomočjo ničel izbrali delo in dobili vsoto:

$$5 + 3 + 5 + 2 = 15$$

  Če dela razdelimo med procesorje na najbolj optimalen način, bomo plačali 15 EUR.

8.2 Glavna naloga

Šestega avgusta 2018 Zemljo naenkrat prizadene šest katastrof: požar v Afriki, poplave v Južni Ameriki, tsunami v Aziji, potres v Avstraliji, tornado v Severni Ameriki in izbruh vulkana v Evropi. K sreči na pomoč priskočijo Maščevalci. Glede na katastrofe so sposobni rešiti sledeče število ljudi (v tisočih):

	požar	poplave	tsunami	potres	tornado	vulkan
Iron Man	10	10	3	10	9	10
Captain America	6	10	3	8	9	10
Hawkeye	5	3	7	11	3	10
Hulk	10	7	8	7	6	6
Thor	5	4	3	12	9	4
Black Widow	10	15	12	17	10	9

Tabela 2: Tabela glavne naloge.

- Najprej smo tabeli priredili matriko:

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 3 & 10 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 3 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 7 & 11 & 3 & 10 \\ 10 & 7 & 8 & 7 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 12 & 9 & 4 \\ 10 & 15 & 12 & 17 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

- Nato smo od največje vrednosti v posamezni vrstici odšteli ostale vrednosti v tej vrstici. V tretjem koraku smo odšteli najmanjše vrednosti v posameznih stolpcih. V četrtem koraku smo pokrili vrstice in stolpce z ničlami in izbrali najmanjši nepokrit element $\varepsilon = 1$. Nepokritim vrednostim smo odšteli ε, enkrat pokritih vrednosti nismo spremenili, dvakrat pokritim pa smo prišteli ε. Zatem smo drugič pokrili vrstice in stolpce z ničlami in znova izbrali najmanjši nepokrit element $\varepsilon = 1$. Po drugem pokrivanju smo dobili sledečo matriko:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Vsakemu Maščevalcu smo na matriki s pomočjo ničel izbrali katastrofo, pri kateri bodo skupaj rešili največ ljudi in dobili dve rešitvi. Prikazana je ena izmed rešitev:
  - Iron Man: 10 000
  - Captain America: 10 000
  - Hawkeye: 10 000
  - Hulk: 8 000
  - Thor: 9 000
  - Black Widow: 17 000

  $$10000 + 10000 + 10000 + 8000 + 9000 + 17000 = 64000$$

  Skupaj lahko rešijo največ 64 000 ljudi.

8.3 Težja naloga

Pri težji nalogi je cilj šestim plavalcem dodeliti eno izmed štirih disciplin, tako da bo skupni čas najkrajši.

	Hrbtno	Prsno	Delfin	Prosto
Ana	65	73	63	57
Bor	67	70	65	58
Cene	68	72	69	55
David	67	75	70	59
Eva	71	69	75	57
Filip	69	71	66	59

Tabela 3: Tabela težje naloge.

- V prvem koraku tabeli priredimo matriko. Za izvajanje MMU potrebujemo $n \times n$ matriko, zato smo dodali dva stolpca z ničlami.

$$\begin{bmatrix} 65 & 73 & 63 & 57 & 0 & 0 \\ 67 & 70 & 65 & 58 & 0 & 0 \\ 68 & 72 & 69 & 55 & 0 & 0 \\ 67 & 75 & 70 & 59 & 0 & 0 \\ 71 & 69 & 75 & 57 & 0 & 0 \\ 69 & 71 & 66 & 59 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Nato smo odšteli najmanjše vrednosti v posameznih stolpcih. V tretjem koraku smo pokrili vrstice in stolpce z ničlami in izbrali najmanjši nepokrit element $\varepsilon = 1$. Nepokritim vrednostim smo odšteli ε, enkrat pokritih vrednosti nismo spremenili, dvakrat pokritim pa smo prišteli ε. Za tem smo drugič pokrili vrstice in stolpce z ničlami in znova izbrali najmanjši nepokrit element $\varepsilon = 1$. Po drugem pokrivanju smo dobili sledečo matriko:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 11 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Plavalce smo razdelili med sledeče discipline
  - Ana: hrbno
  - Bor: delfin
  - Cene: prosto
  - David: /
  - Eva: prsno
  - Filip: /

  Skupni čas izbranih plavalcev je 254 sekund.

Literatura

[1] Matija Polajnar, *Teorija grafov*, 2006

[2] Teorija grafov (dostop 7. 8. 2018),
`https://sl.wikipedia.org/wiki/Dvodelni_graf`