Paradoks prijateljstva

Avtorji: Hana Glumac, Rene Klement, Mia Zala Smrečnik
Mentorica: Petra Podlogar

Povzetek

V članku smo se ukvarjali s paradoksom prijateljstva - fenomenom, ki ga je prvi opisal ameriški sociolog dr. Scott Feld leta 1991. Paradoks pravi, da imajo ljudje v povprečju manj prijateljev od svojih prijateljev. Zato smo si pogledali sredine in teorijo grafov, kar nam je pomagalo pri dokazu našega problema.

1 Uvod

Majda je nekega dne med druženjem opazila, da so se njeni prijatelji pozdravljali in klepetali z ljudmi, ki jih ona ne pozna, ali pa so med pogovorom omenjali njej nepoznane ljudi. Sama se najpogosteje druži samo s svojo skupino prijateljev in nima veliko znancev, s katerimi bi se zagovorila na cesti ali imela tako presenetljive dogodivščine, kot jih imajo nekateri njeni prijatelji. Prišla je do ugotovitve, da imajo njeni prijatelji več prijateljev kot ona sama. Zato se je odločila, da bo stvar raziskala z matematičnega vidika.

2 Sredine

Preden se bomo zares lotili Majdinega problema, si bomo pogledali nekaj definicij.

Definicija 1. ***(Aritmetična sredina)*** *Naj bosta a in b poljubni realni števili. Aritmetična sredina teh dveh števil je*

$$A = \frac{a+b}{2}.$$

V splošnem aritmetično sredino n števil $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ definiramo kot

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Ker pa število, ki je aritmetična sredina, ne predstavlja vedno srednje vrednosti, ki jo iščemo, obstaja vrsta aritmetične sredine, ki se imenuje tehtana aritmetična sredina. Namesto tega, da vsako število prispeva enako, nekatera števila prispevajo več. Računa se s frekvencami f_i, ki povejo, kolikokrat vrednost a_i dejansko nastopa v izrazu. Te frekvence imenujemo **uteži**.

Definicija 2. ***(Tehtana aritmetična sredina)*** *Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ in $f_1, f_2, \ldots, f_n$ uteži, katerih vsota je naravno število. Tehtana aritmetična sredina teh n števil je*

$$WA = \frac{f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 + \ldots + f_n \cdot a_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}.$$

Pomembna značilnost tehtane aritmetične sredine dveh števil a in b je, da na številski premici njena pozicija ni nujno točno na sredini, temveč se lahko nahaja drugje. Odvisno je od uteži, ki jih imata a in b.

Definicija 3. ***(Geometrijska sredina)*** *Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ poljubna realna števila. Geometrijska sredina teh n števil je*

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Definicija 4. ***(Harmonična sredina)*** *Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ poljubna realna števila. Harmonična sredina teh n števil je*

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

2.1 Neenakosti med sredinami

Med sredinami, ki smo jih spoznali, veljajo naslednje neenakosti:

$$A \geq G \geq H.$$

Dokaz. (za $n = 2$)

$$\frac{a+b}{2} \overset{?}{\geq} \sqrt{ab} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \overset{?}{\geq} ab \Leftrightarrow$$

(Kvadrirali smo lahko, saj sta bili na obeh straneh nenegativni števili.)

$$a^2+2ab+b^2 \overset{?}{\geq} 4ab \Leftrightarrow$$

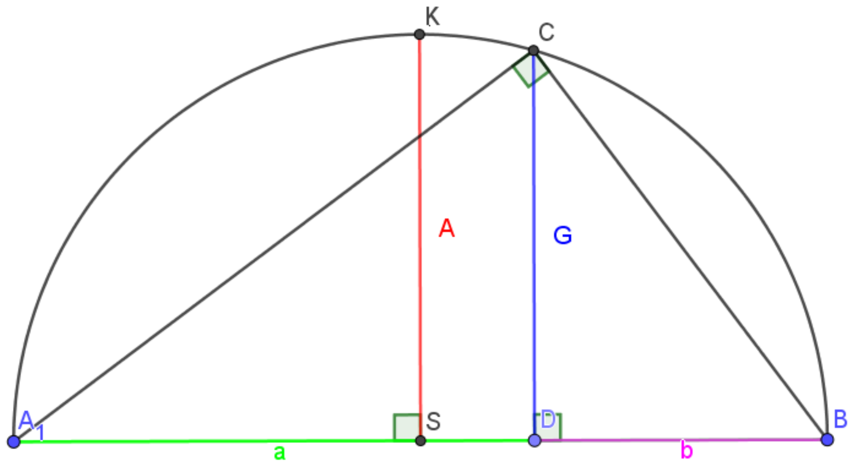
$$a^2-2ab+b^2 \overset{?}{\geq} 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-b)^2 \overset{?}{\geq} 0$$

To pa velja, saj so kvadrati vedno nenegativni.

□

Te neenakosti pa imajo tudi lepo geometrijsko interpretacijo.



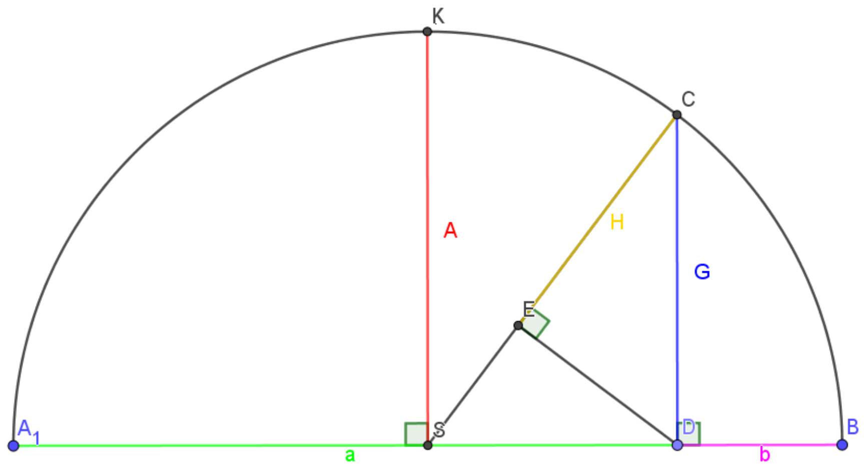
Slika 1: Povezava med A in G

Vzemimo polkrog s premerom $a + b$. Tedaj je radij kroga ravno $\frac{a+b}{2}$, kar je aritmetična sredina (na slikah bomo radij, pravokoten na polmer kroga označevali z A - aritmetična sredina).

Iz točke D smo narisali pravokotnico do krožnega loka. S podobnimi trikotniki lahko vidimo, da je na novo nastala daljica DC po dolžini enaka geometrijski sredini.

$$\frac{G}{b} = \frac{a}{G}$$
$$G^2 = ab$$
$$G = \sqrt{ab}$$

S skice je razvidno tudi, da je geometrijska sredina vedno manjša od aritmetične, razen v primeru, ko sta števili a in b enaki. Takrat geometrijska sredina predstavlja polmer polkroga.



Slika 2: Povezava med A, G in H

Dodajmo še daljico SC. Na njo narišemo pravokotno daljico ED. Novo nastala daljica EC je po dolžini enaka harmonični sredini. Tu si spet lahko pomagamo s podobnimi trikotniki.

$$\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$$
$$AH = G^2$$
$$H = \frac{G^2}{A} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

S skice, natančneje iz trikotnika CDE, vidimo, da bo harmonična sredina vedno manjša ali enaka geometrijski, saj je geometrijska sredina dolžina hipotenuze, harmonična pa dolžina katete.

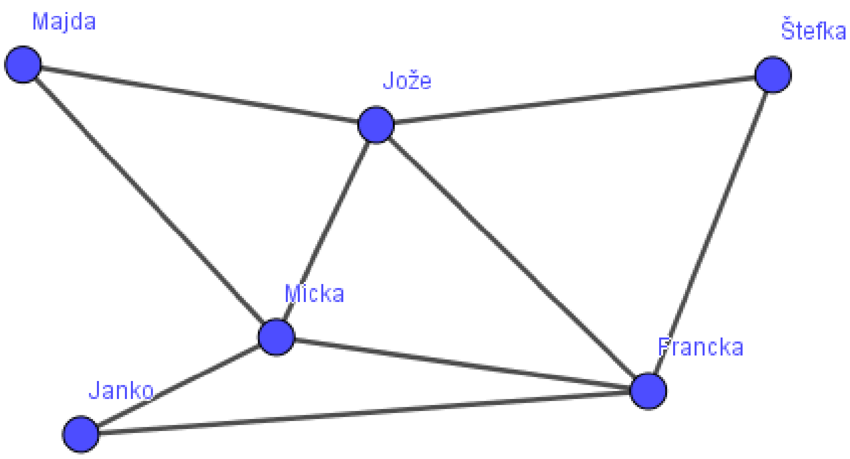
Pokazali smo, da je harmonična sredina manjša ali enaka od geometrijske, torej bo tudi manjša ali enaka aritmetični sredini. Enakost med vsemi tremi sredinami velja natanko tedaj, ko sta a in b enaka.

3 O grafih

Graf $G = (V, E)$ je urejen par množice vozlišč V in množice povezav E. Vsaka povezava med seboj povezuje dve vozlišči. **Soseščina vozlišča** je množica vseh vozlišč, ki so z njim povezana s povezavo. **Stopnja vozlišča** v je moč soseščine vozlišča v, označi pa se z $deg(v)$.

4 Paradoks prijateljstva

Zdaj se lahko spet vrnemo k Majdinem problemu. Da bi si ga lažje predstavljali, si ga najprej poglejmo na primeru. Na sliki je preprost graf, s pomočjo katerega bomo poskusili ugotoviti povezavo med povprečnim številom prijateljev in povprečnim številom prijateljev od prijateljev. V tem grafu bodo vozlišča predstavljale osebe, povezave pa prijateljstva.



Slika 3: Majdin graf

Z grafa lahko preberemo za naš problem pomembne podatke in jih zberemo v tabeli.

S temi podatki lahko preprosto izračunamo povprečno število prijateljev.

$$\frac{\sum_{o \in osebe} \text{število prijateljev od } o}{\text{število oseb}} = \frac{2+4+4+2+2+4}{6} = 3$$

Osebe	Št. prijateljev	Št. prijateljev od prijateljev
Majda	2	4, 4
Micka	4	2, 4, 2, 4
Francka	4	4, 2, 2, 4
Janko	2	4, 4
Štefka	2	4, 4
Jože	4	2, 4, 4, 2

Povprečno število prijateljev bi radi primerjali s povprečnim številom prijateljev od prijateljev. S P_o lahko izrazimo množico prijateljev osebe o, zapišemo splošno formulo in izračunamo vrednost.

$$\frac{\sum_{o \in osebe} \sum_{p \in P_o} \text{število prijateljev od } p}{\sum_{o \in osebe} \text{število prijateljev od } o} =$$

$$\frac{(4+4)+(2+4+2+4)+(4+2+2+4)+(4+4)+(4+4)+(2+4+4+2)}{18} =$$

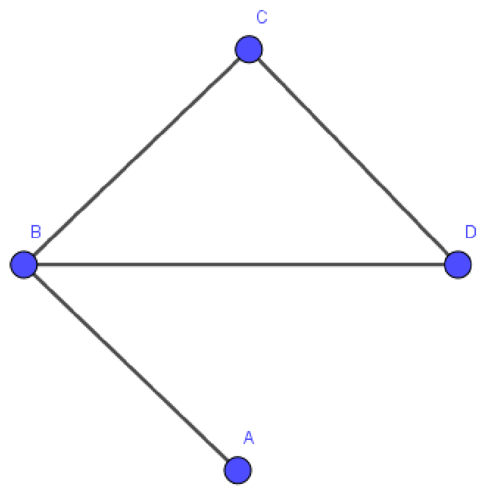
$$\frac{60}{18} = 3,\bar{2}$$

V tem primeru je povprečno število prijateljev res manjše od povprečnega števila prijateljev od prijateljev. Za dokaz izreka, da ta neenakost velja vedno, pa bomo potrebovali splošne formule.

Vidimo, da se povprečno število prijateljev izračuna s formulo

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} deg(v_i)}{n}.$$

Formulo za povprečno število prijateljev od prijateljev najlažje izpeljemo, če si najprej pogledamo, kaj bi se zgodilo na manjšem podgrafu.



Slika 4: Primer manjšega grafa

$$\text{povprečno število prijateljev od prijateljev} =$$

$$\frac{(deg(B)) + (deg(A) + deg(C) + deg(D)) + (deg(B) + deg(D)) + (deg(B) + deg(C))}{\sum_{v\in V} deg(v)} =$$

$$\frac{3deg(B) + deg(A) + 2deg(C) + 2deg(D)}{\sum_{v\in V} deg(v)}$$

Opazimo, da je $\deg(B) = 3$ in se tudi trikrat pojavi. Podobno velja za vsa ostala vozlišča. To se zgodi vedno, saj je vsak tolikim ljudem prijatelj, kolikor ima on prijateljev. Zato velja:

$$\frac{3deg(B) + deg(A) + 2deg(C) + 2deg(D)}{\sum_{v\in V} deg(v)} =$$

$$\frac{deg(B)\cdot deg(B) + deg(A)\cdot deg(A) + deg(C)\cdot deg(C) + deg(D)\cdot deg(D)}{\sum_{v\in V} deg(v)}.$$

Povprečno število prijateljev od prijateljev se tako izračuna s formulo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i)}{\sum_{i=1}^{n} deg(v_i)}.$$

Izrek 1. *V poljubnem grafu velja*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} deg(v_i)}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i)}{\sum_{i=1}^{n} deg(v_i)}.$$

Ker bomo pri dokazu potrebovali tudi varianco, je tu njena definicija.

Definicija 5. ***Varianca*** *oz. merilo za razpršenost podatkov je definirana kot povprečje kvadratov odklonov vrednosti* $deg(v)$ *od aritmetične sredine* μ*:*

$$\rho^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(deg(v_i) - \mu)^2}{n}.$$

Ker je varianca definirana kot kvadrat realnega števila, je vedno večja ali enaka 0.

Dokaz. Namesto dolgega izraza za povprečno število prijatejev zdaj pišemo μ:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} deg(v_i)}{n}.$$

Uporabimo definicijo variance ρ^2:

$$\rho^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(deg(v_i) - \mu)^2}{n} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i) - 2\mu \sum_{i=1}^{n} deg(v_i) + n\mu^2}{n} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i) - 2n\mu^2 + n\mu^2}{n} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i)}{n} - \mu^2.$$

Torej je

$$\rho^2 + \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i)}{n}.$$

Vstavimo vrednost $\frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i)}{n}$ v neenačbo $\mu^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} deg^2(v_i)}{n}$:

$$\mu^2 \leq \rho^2 + \mu^2.$$

$$0 \leq \rho^2$$

Ker je $\rho^2 \geq 0$, začetna neenakost, ki jo dokazujemo, velja. □

S tem smo dokazali, da je povprečno število prijateljev vedno manjše ali enako povprečnemu številu prijateljev od prijateljev.

5 Zaključek

Pri raziskovanju Majdinega problema smo naredili dva ovinka - prvega pri sredinah, drugega pri grafih. Potem smo z nabranim znanjem dokazali izrek, ki pravi, da je popolnoma normalno, da ima Majda manj prijateljev kot njeni prijatelji. Zanimivo bi bilo raziskati tudi razširitev tega problema na usmerjene grafe, kar pa je problem za kakšen drug dan ali MaRS.

Literatura

[1] J. A. Čibej, *Matematika*, DZS, Ljubljana, 2001.

[2] *Friendship Paradox*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 9. 8. 2018], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Friendship_paradox`.

[3] Ferčec, B., Tratnik, N. *Obtežena povprečja in paradoks prijateljstva.* Obzornik za matematiko in fiziko, 2016, 63(1), 1-9.