Ekstremalni problemi

Ana Knap, Andrej Matevc, Aleksander Kočevar Polak
Mentor: Žan Hafner Petrovski

Povzetek

Ali ste se kdaj vprašali, kako bi za svoje krave postavili ograjo, da bi imele na voljo čim večjo površino sočne trave? Ali pa, kako bi iz pločevine oblikovali konzervo, v katero bi lahko dali čim več fižola? Mi smo se! Pred reševanjem takih problemov smo se spoznali z odvodom, potem pa ga s pridom uporabili.

1 Uvod

V članku se najprej spoznamo z odvodom ter izpeljemo nekaj njegovih osnovnih lastnosti. Spoznamo tudi pojem ekstrema funkcije in njegovo povezavo z odvodom. Nato svoja spoznanja uporabimo pri reševanju dveh nalog.

2 Odvod

2.1 Definicija odvoda

Zapišimo najprej definicijo odvoda.

Definicija 1. *Naj bo realna funkcija f definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Če limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*obstaja, pravimo, da je funkcija f **odvedljiva** v točki a in*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*imenujemo **odvod funkcije** f v točki a.*

Včasih namesto zapisa zgoraj uporabimo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

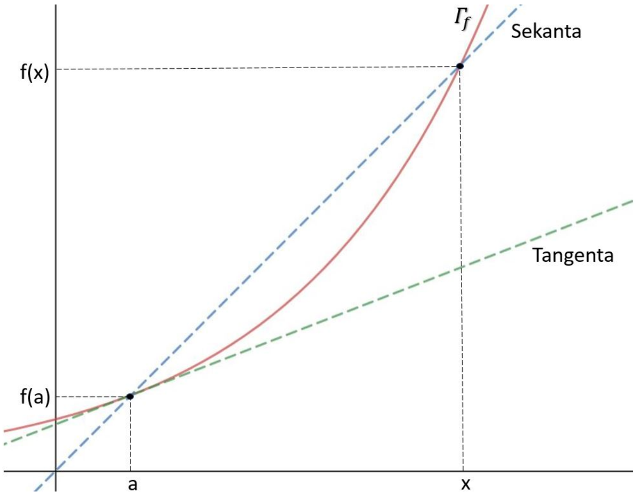
2.2 Geometrijski pomen odvoda

Vzemimo funkcijo f, ki je odvedljiva v točki a. Nato potegnimo premico skozi točki $(a, f(a))$ in $(x, f(x))$. Ta premica je sekanta grafa funkcije, to je premica, ki ima z grafom funkcije vsaj 2 skupni točki. Njen naklonski koeficient je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Pomikajmo zdaj x proti a. Točka $(x, f(x))$ potuje po grafu funkcije f proti točki $(a, f(a))$, naklonski koeficient sekante $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pa je vse bližje $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Število $f'(a)$ je torej naklonski koeficient premice skozi $(a, f(a))$, h kateri limitirajo sekante, ko gre x proti a. Ta premica je *tangenta* na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$, torej se grafa funkcije le dotika. Njena enačba se glasi

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$



2.3 Lastnosti odvoda

Zdaj poglejmo nekaj standardnih lastnosti odvoda, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 1. *Za $u(x) = x^n$, kjer je $n \in \mathbb{Z}$, velja*

$$u'(x) = nx^{n-1}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + nhx^{n-1} + ... + nh^{n-1}x + h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(nx^{n-1} + ... + nh^{n-2}x + h^{n-1})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + \binom{n}{2} hx^{n-2} + ... + nh^{n-2}x + h^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

$\square$

Trditev 2. *Za odvedljivi funkciji $f, g : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, velja:*

(i) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$,

(iii) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *kjer* $g(x) \neq 0$.

Dokaz:

(i) $(f(x) + g(x))' =$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= f^{'}(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

(ii) $(f(x)g(x))' =$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x)) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x))}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}
$$

(iii) $(\frac{f(x)}{g(x)})' =$

$$
\begin{aligned}
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)(-g(x)^{-2}\ g'(x)) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

$\square$

3 Ekstremi funkcij

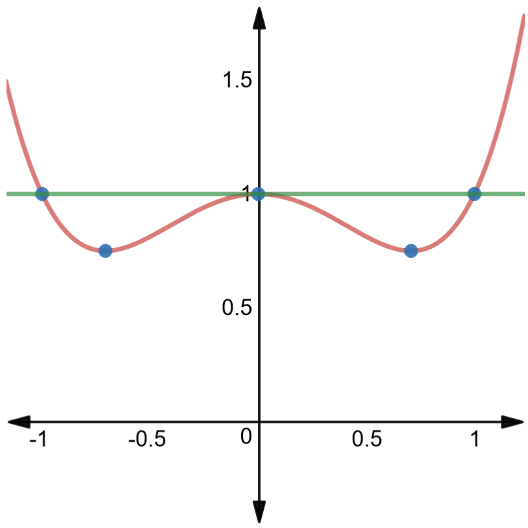
Ekstrem je skupno ime za maksimum in minimum funkcije. Naj bo f funkcija na $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f ima v točki $a \in D$ *globalni maksimum*, če je $f(x) \leq f(a)$, za vsak $x \in D$. Funkcija f ima v točki $a \in D$ *globalni minimum*, če je $f(x) \geq f(a)$ za vsak $x \in D$.

Opazimo, da ni nujno, da ima funkcija maksimum oziroma minimum in če ga ima, ta ni nujno dosežen le v eni točki.

3.1 Način iskanja ekstremov funkcije

Naj bo f zvezna funkcija na nekem intervalu in naj bo na notranjosti tega intervala odvedljiva. Če želimo poiskati ekstreme te funkcije, moramo pogledati njene vrednosti v krajiščih intervala in v stacionarnih točkah. Stacionarne točke dane funkcije so točke iz domene, v katerih je tangenta na funkcijo vzporedna z abscisno osjo in torej odvod enak 0.

Zgled 1. *Poiščimo ekstreme funkcije* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *podane s predpisom* $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.



Slika 1: Graf funkcije f na intervalu $[-1, 1]$.

Najprej izračunajmo vrednosti f *v krajiščih intervala, torej v* -1 *in* 1. *Dobimo, da je* $f(-1) = 1$ *in* $f(1) = 1$.

Stacionarne točke poiščemo z reševanjem enačbe $f'(x) = 0$. Dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4 - x^2 + 1)' \\ &= 4x^3 - 2x \\ &= 2x(2x^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali da je funkcija konstante vodoravna in je zato odvod take funkcije enak 0. Množica rešitev te enačbe je $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. V dobljenih stacionarnih točkah izračunamo vrednosti f.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{3}{4}, \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Sedaj pa izmed petih možnih kandidatov za globalni maksimum in minimum, torej točk $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$, $(0, 1)$ in $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$, izberemo tiste, ki imajo največjo oziroma najmanjšo y-koordinato.

Vidimo, da so maksimumi trije: $(-1, 1)$, $(1, 1)$ in $(0, 1)$, minimuma pa dva: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$.

4 Naloge

4.1 Konzerva

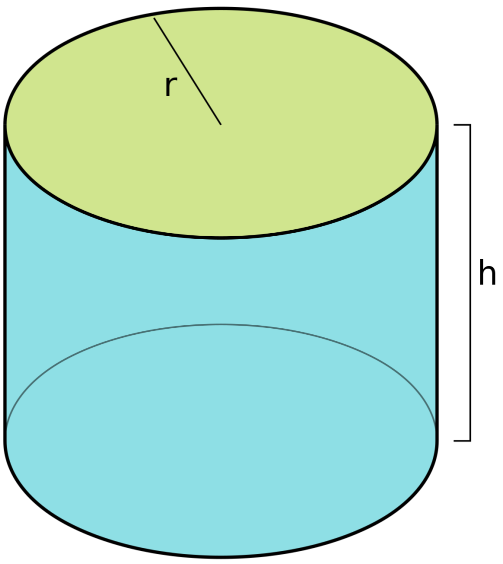
Kos pločevine površine P bi radi preoblikovali v konzervo valjaste oblike, katere prostornina V bo čim večja. V kakšnem razmerju morata biti radij osnovne ploskve r in višina pločevinke h, da bomo to dosegli?

Najprej zapišimo funkciji za prostornino in površino valja, torej

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

in

$$P(r,h) = 2\pi r(r+h).$$



Slika 2: Na skici je radij osnovne ploskve označen z r, višina pa s h.

Ker je površina že določena, sta prosti spremenljivki le radij r in višina h. Če želimo, da je funkcija prostornine odvisna le od ene spremenljivke, moramo eno izmed dveh izraziti z drugo. Odločimo se, da višino izrazimo z radijem, torej

$$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Vstavimo v formulo za prostornino in dobimo funkcijo za prostornino valja radija r in površine P v odvisnosti od r

$$V(r) = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}.$$

Ker želimo doseči največjo možno prostornino, moramo poiskati ekstrem funkcije prostornine valja. Vemo pa, da je v točki, kjer bo ta dosežen, tangenta na graf te funkcije vzporedna z abscisno osjo in torej bo odvod funkcije V enak 0. Naslednje enačbe prikazujejo postopek odvajanja funkcije za prostornino valja V.

$$V'(r) = \left(\frac{Pr - 2\pi r^3}{2}\right)' = \frac{P - 6\pi r^2}{2}.$$

Nato odvod enačimo z 0 in izrazimo polmer r

$$\frac{P - 6\pi r^2}{2} = 0, \quad r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

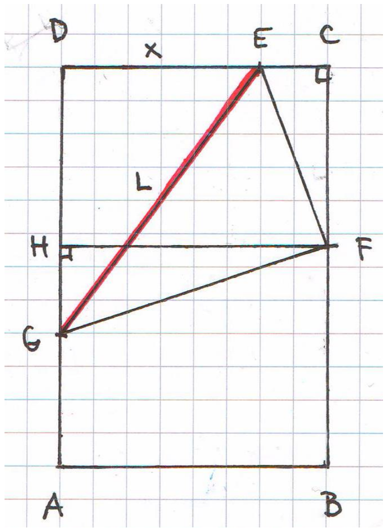
Vstavimo formulo za površino in izrazimo radij z višino, da dobimo razmerje

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\frac{2\pi r(r+h)}{6\pi}}, \\
r^2 &= \frac{r(r+h)}{3}, \\
r &= \frac{r+h}{3}, \\
r &= \frac{h}{2}, \\
2r &= h.
\end{aligned}$$

Torej je prostornina valja največja, če sta radij osnovne ploskve valja in višina v razmerju 1:2.

4.2 Prepogibanje lista

Imamo list papirja pravokotne oblike. List prepognemo tako, da njegov levi zgornji kot pristane na desni stranici lista in sta obe krajišči roba prepogiba na stranicah, ki imata za eno krajišče levi zgornji kot (glej sliko). Zanima nas, kako prepogniti papir, da bo rob prepogiba L najkrajši.



Slika 3: Skica prepogiba

Najprej je dobro, da pogledamo, kakšne razdalje imamo na skici, kaj poznamo, kaj lahko izračunamo oziroma izrazimo in s čim je to pametno izraziti. Za krajšo stranico določimo, da meri eno enoto.

Označimo z x razdaljo med položajem zgornjega levega oglišča pred prepogibanjem in točko prepogiba na zgornji stranici lista, ki jo označimo z E. Opazimo tudi, da imamo opravka s kar precej trikotniki, ki bi znali biti med seboj podobni ali pa skladni. Iz točke F lahko potegnemo daljico HF, ki je vzporedna stranici CD (glej sliko). Če pogledamo trikotnika HGF in CEF ugotovimo zanimivo stvar. Kot EFC je enak kotu HFG, saj lahko kot GFB zapišemo kot $\frac{\pi}{2} - HFG$ ali pa kot $\pi - \frac{\pi}{2} - EFC$, kar je enako $\frac{\pi}{2} - EFC$. Veseli ugotovimo, da se trikotnika ujemata v dveh kotih in sta si podobna, zato lahko enačimo razmerje njunih stranic:

$$\frac{|HF|}{|GH|} = \frac{|FC|}{|EC|}. \tag{1}$$

Vemo, da je $|HF| = 1$ in $|EC| = 1 - x$. S pomočjo Pitagorovega izreka izrazimo še ostali dve dolžini in dobimo

$$\begin{aligned} |FC| &= \sqrt{x^2-(1-x)^2} = \sqrt{2x-1}, \\ |GH| &= \sqrt{(L^2-x^2)-1}. \end{aligned}$$

Iz enačbe (1) dobimo naslednjo enačbo:

$$\frac{1}{\sqrt{L^2-x^2-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}}{1-x}. \tag{2}$$

Naš cilj je izpostaviti L. Enačbo (2) množimo z imenovalcema

$$1-x = \sqrt{(L^2-x^2-1)(2x-1)},$$

kvadriramo

$$(1-x)^2 = 2L^2x - L^2 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1,$$

se znebimo oklepajev in izpostavimo L^2

$$\begin{aligned} 1-2x+x^2 &= L^2(2x-1) - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 \\ L^2 &= \frac{2x^3}{2x-1}. \end{aligned}$$

Za konec še korenimo

$$L = \sqrt{\frac{2x^3}{2x-1}}. \tag{3}$$

Ker iščemo minimalno razdaljo L oziroma minimum funkcije $L(x)$, odvajajmo funkcijo pod korenom in jo enačimo z 0.

$$\left(\frac{2x^3}{2x-1}\right)' = 0$$

Funkcijo odvajamo po pravilu za odvajanje količnika

$$\frac{6x^2(2x-1) - 2x^3 \cdot 2}{(2x-1)^2} = 0.$$

Ker hočemo, da je ulomek enak 0, njegov števec enačimo z 0

$$12x^3 - 6x^2 - 4x^3 = 0.$$

Poenostavimo zgornjo enačbo

$$4x^3 - 3x^2 = 0$$

in izpostavimo, kar se izpostaviti da

$$x^2(4x-3)=0.$$

Dobimo tri rešitve, od katerih je ena dvojna in enaka 0. Ti dve rešitvi izločimo iz nabora rešitev, ki smo jih dobili, saj želimo papir prepogniti. Če je x enak 0, pomeni, da se papirja sploh nismo dotaknili. Ostane nam torej samo še ena rešitev

$$x=\frac{3}{4}.$$

Sedaj vemo, da moramo papir prepogniti tako, da bo razdalja od levega zgornjega oglišča do točke prepogiba na zgornji stranici lista enaka $\frac{3}{4}$.

Poudariti pa je treba, da ta rešitev ne bi veljala za čisto vsak papir, ki bi ga izbrali. Za spodnjo in zgornjo stranico vemo, da merita eno enoto, za daljšo pa mora veljati, da mora biti daljša od daljice $|DG|$. Izračunajmo dolžino te daljice s pomočjo Pitagorovega izreka

$$|DG|=\sqrt{L^2-x^2}.$$

Za L vstavimo enačbo (3)

$$|DG|=\sqrt{\frac{2x^3}{2x-1}-x^2}$$

in namesto x vstavimo $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}|DG| &= \sqrt{\frac{2\cdot(\frac{3}{4})^3}{2\cdot\frac{3}{4}-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{3\sqrt{8}}{8}.\end{aligned}$$

Dolžina leve in desne stranice mora biti torej večja od $\frac{3\sqrt{8}}{8}$.

Literatura

[1] Skica valja, dostop 11.8.2018
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/36/Circular_cylinder_rh.svg/1200px-Circular_cylinder_rh.svg.png

[2] Prepogibanje lista, dostop 11.8.2018
http://datagenetics.com/blog/january22018/index.html

[3] Slika 1 je bila ustvarjena na: https://www.desmos.com/