

Kompleksna dinamika

Prepis in ureditev rokopisnih zapiskov

1 Osnovni pojmi in definicije

Pri obravnavi bomo uporabljali predvsem realna in kompleksna števila. Definicije, trditve in dokazi so zapisani tako, da jih lahko uporabljamo nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Zato pišemo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Kadar kompleksnih števil ne potrebujemo, običajno vzamemo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Glavni vir pri pripravi teh zapiskov je bil spletni učbenik Marka McClura *Complex Dynamics* [1].

Definicija 1.1 (Dinamični sistem). *Dinamični sistem* je funkcija

$$f: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}.$$

Glavne in edine primere dinamičnih sistemov bomo dobili iz družine funkcij, ki jih določa parameter $c \in \mathbb{F}$:

$$f_c(x) = x^2 + c.$$

Definicija 1.2 (Orbita). Za $x \in \mathbb{F}$ definiramo *orbito točke* x z zaporedjem

$$x_0 := x, \quad x_1 := f(x_0), \quad x_2 := f(x_1), \quad \dots, \quad x_n := f(x_{n-1}).$$

Torej je $x_n = f^n(x_0)$, kjer f^n pomeni n -kratno kompozicijo funkcije f .

Definicija 1.3 (Periodična točka, fiksna točka in cikel). Točka $x \in \mathbb{F}$ je *periodična*, če obstaja $m \in \mathbb{N}$, za katerega je

$$f^m(x) = x.$$

Najmanjšemu takemu m pravimo *perioda* točke x . Periodično točko s periodo 1 imenujemo *fiksna točka*. Zanj velja $f(x) = x$.

Če ima x_0 periodo m in označimo $x_j = f^j(x_0)$, množico

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$$

imenujemo *m-cikel* oziroma *periodični cikel*.

Če ima x periodo m , se njena orbita ciklično ponavlja:

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto \dots \mapsto x_{m-1} \mapsto x_0.$$

Točka je zato fiksna točka funkcije f^m . Obrat ne velja brez dodatnega pogoja: fiksna točka f^m ima lahko periodo k , kjer $k \mid m$ in $k < m$.

Primer 1.4. Naj bo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ in $f(x) = x^2 - 1$. Teda

$$0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \dots,$$

zato imata 0 in -1 periodo 2.

Fiksne točke dobimo iz

$$x = x^2 - 1 \iff x^2 - x - 1 = 0,$$

zato sta

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Za periodo 2 rešimo

$$f^2(x) = x, \quad f^2(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2,$$

oziroma

$$x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

Po izločitvi fiksnih točk ostaneta 0 in -1 .

1.1 Pajčevinasti diagrami

Pri realnih dinamičnih sistemih lahko iteracije ponazorimo s pajčevinastim diagramom. Začnemo v točki (x_0, x_0) na simetrali $y = x$. Iz (x_n, x_n) se navpično premaknemo do grafa $y = f(x)$, torej do (x_n, x_{n+1}) , nato pa vodoravno nazaj do simetrale, v točko (x_{n+1}, x_{n+1}) . Ponavljanje teh dveh korakov nariše orbito. Presečišča grafa $y = f(x)$ s simetralo $y = x$ so ravno fiksne točke.

1.1.1 Funkcija $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

Fiksne točke dobimo enako kot pri funkciji $x^2 - 1$:

$$x = x^2 - \frac{1}{4} \iff x^2 - x - \frac{1}{4} = 0.$$

Kvadratna formula da

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2},$$

torej

$$x_- \approx -0,20710678 \quad \text{in} \quad x_+ \approx 1,20710678.$$

Za začetno vrednost $x_0 = 0,97$ dobimo prve člene

$$0,97 \mapsto 0,6909 \mapsto 0,22734 \mapsto -0,19832 \mapsto -0,21067 \mapsto -0,20562 \mapsto \dots$$

Orbita se izmenično približuje fiksni točki x_- . Na pajčevinastem diagramu zato stopnice tvorijo vedno manjše pravokotnike okoli presečišča grafa in simetrale.

Slika 1 prikazuje celotni pajčevinasti diagram, slika 2 pa povečavo majhne okolice fiksne točke, v kateri postane izmenično približevanje še jasnejše. Zaporedni členi ležijo izmenično levo in desno od x_- , velikosti pravokotnikov pa se krčijo proti nič. Natančno merilo tega krčenja bomo v naslednjem razdelku opisali z odvodom.

Za $x_0 = 1,21$ je položaj drugačen. Začetna vrednost je nekoliko večja od druge pozitivne fiksne točke:

$$x_0 = 1,21 > x_+ = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,20710678.$$

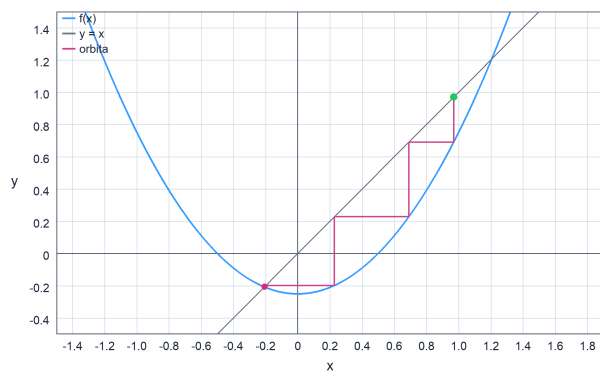


Fig. 1: Celotni pajčevinasti diagram za $f(x) = x^2 - 1/4$ in $x_0 = 0,97$.

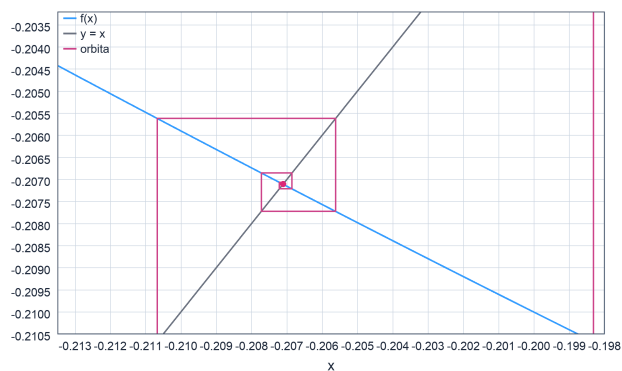


Fig. 2: Povečava okoli privlačne fiksne točke $x_- \approx -0,2071$.

Iteracije se zato povečujejo,

$$\begin{aligned} 1,21 &\mapsto 1,2141 \mapsto 1,22404 \mapsto 1,24827 \mapsto 1,30818 \\ &\mapsto 1,46134 \mapsto 1,88550 \mapsto 3,30512 \mapsto 10,6738 \mapsto \dots, \end{aligned}$$

in orbita pobegne proti $+\infty$.

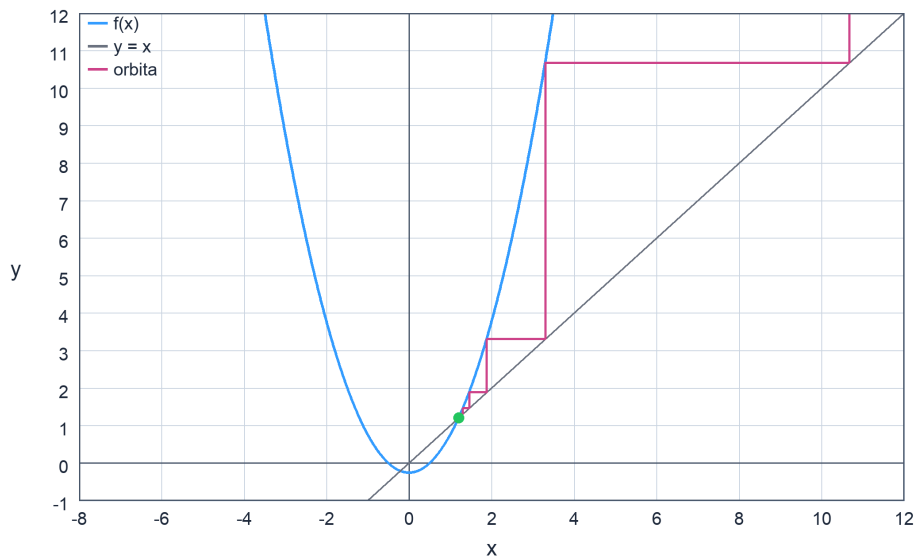


Fig. 3: Za $f(x) = x^2 - 1/4$ in $x_0 = 1,21 > x_+$ pajčevinaste stopnice hitro zapustijo okolico fiksne točke in orbita pobegne v neskončnost.

1.1.2 Funkcija $f(x) = x^2 - 1$

Kot smo izračunali zgoraj, sta njeni fiksni točki

$$x_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,61803 \quad \text{in} \quad x_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803.$$

Pri $x_0 = 1$ orbita že po prvem koraku pade na cikel

$$1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \dots$$

Pajčevinasti diagram zato po prehodnem koraku ponavlja isti pravokotnik med točkama 0 in -1 . Vidimo privlačni 2-cikel $\{0, -1\}$.

Začetna vrednost $x_0 = 1,6$ je še vedno manjša od pozitivne fiksne točke $x_+ \approx 1,61803$. Njena orbita zato *ne* pobegne:

$$1,6 \mapsto 1,56 \mapsto 1,4336 \mapsto 1,05521 \mapsto 0,11347 \mapsto -0,98713 \mapsto -0,02558 \mapsto -0,99935 \mapsto \dots,$$

temveč se prav tako približuje ciklu $\{0, -1\}$.

Za prikaz pobega moramo izbrati vrednost nad pozitivno fiksno točko, na primer $x_0 = 1,62 > x_+$. Tedaj

$$1,62 \mapsto 1,6244 \mapsto 1,63868 \mapsto 1,68526 \mapsto 1,84009 \mapsto 2,38593 \mapsto 4,69268 \mapsto 21,0213 \mapsto \dots,$$

zato orbita pobegne proti $+\infty$.

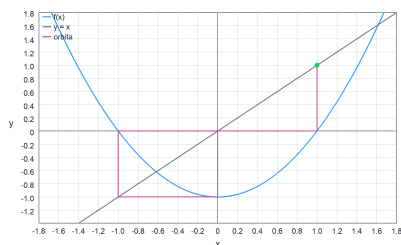


Fig. 4: $x_0 = 1$: orbita vstopi v 2-cikel $0 \leftrightarrow -1$.

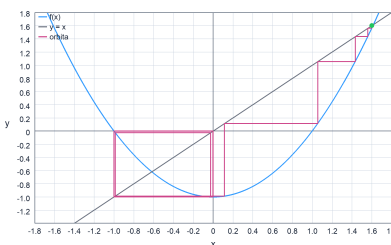


Fig. 5: $x_0 = 1,6 < x_+$: orbita se približuje istemu 2-ciklu.

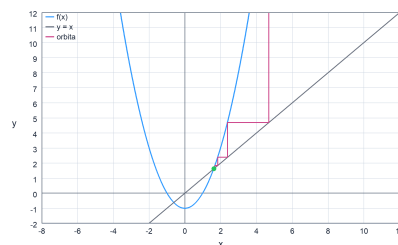


Fig. 6: $x_0 = 1,62 > x_+$: orbita pobegne v neskončnost.

Ti primeri že pokažejo več različnih vrst obnašanja: konvergenco k fiksni točki, približevanje periodičnemu ciklu in pobeg v neskončnost. Pozneje bomo videli tudi bolj zapletene, kaotične orbite. V naslednjih podglavljih bomo ta obnašanja sistematično karakterizirali z odvodom v fiksni oziroma periodični točki.

2 Klasifikacija fiksnih točk

2.1 Karakterizacija z odvodom

Definicija 2.1. Naj bo $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ odvedljiv dinamični sistem in naj bo x_0 njegova fiksna točka. Točka x_0 je

1. *privlačna*, če $0 < |f'(x_0)| < 1$;
2. *odbojna*, če $|f'(x_0)| > 1$;
3. *nevtralna*, če $|f'(x_0)| = 1$;
4. *superprivlačna*, če $|f'(x_0)| = 0$.

Odvod je naklon najboljše linearne približka. Za x blizu x_0 velja

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

napaka pa je višjega reda. Če je x_0 fiksna točka, dobimo

$$\begin{aligned} |f(x) - x_0| &= |f(x) - f(x_0)| \\ &\approx |f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0))| \\ &= |f'(x_0)| |x - x_0|. \end{aligned}$$

Zato se točke pri $|f'(x_0)| < 1$ približujejo x_0 , pri $|f'(x_0)| > 1$ pa se od njega oddaljujejo. Če je $|f'(x_0)| = 1$, samo iz odvoda ne moremo sklepati, ali se orbita približuje ali oddaljuje.

Primer 2.2 ($f(x) = x^2 - 1/4$). Fiksni točki te funkcije smo že izračunali:

$$x_- = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{in} \quad x_+ = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Ker je $f'(x) = 2x$, v manjši fiksni točki dobimo

$$f'(x_-) = 1 - \sqrt{2} \quad \text{in} \quad |f'(x_-)| = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 < 1.$$

Zato je x_- privlačna fiksna točka. V večji fiksni točki pa je

$$f'(x_+) = 1 + \sqrt{2} \quad \text{in} \quad |f'(x_+)| = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142 > 1,$$

zato je x_+ odbojna fiksna točka. S tem odvod pojasni obnašanje, ki smo ga opazili na pajčevinastih diagramih: orbite v okolici x_- se ji približujejo, orbite v okolici x_+ pa se od nje oddaljujejo.

3 Klasifikacija orbit

Periodična točka s periodo m je fiksna točka funkcije f^m , zato njeno orbito klasificiramo glede na odvod f^m .

Definicija 3.1. Naj bo x_0 periodična točka s periodo m in naj bo $x_j = f^j(x_0)$. Orbita točke x_0 je *privlačna*, *odbojna*, *nevtralna* oziroma *superprivlačna*, kadar je x_0 ustrezne vrste fiksna točka funkcije f^m .

Po verižnem pravilu

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

in zato

$$(f^m)'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{m-1}).$$

Primer 3.2 ($f(x) = x^2 - 1$). Fiksni točki sta

$$x_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{in} \quad x_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ker je $f'(x) = 2x$, velja

$$\begin{aligned} |f'(x_-)| &= |1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1 \approx 1,2361 > 1, \\ |f'(x_+)| &= 1 + \sqrt{5} \approx 3,2361 > 1. \end{aligned}$$

Obe fiksni točki sta torej odbojni.

Po drugi strani točki 0 in -1 tvorita 2-cikel, saj

$$f(0) = -1 \quad \text{in} \quad f(-1) = 0.$$

Odvod funkcije f^2 v točki 0 je

$$(f^2)'(0) = f'(-1)f'(0) = (-2) \cdot 0 = 0.$$

Enak rezultat dobimo, če cikel začnemo v -1 :

$$(f^2)'(-1) = f'(0)f'(-1) = 0 \cdot (-2) = 0.$$

Zato je cikel $\{0, -1\}$ superprivlačen, kar je močnejša oblika privlačnosti. To pojasni, zakaj se mu približujejo orbite, prikazane v pajčevinastih diagramih.

4 Bifurkacijski diagram in orbite kritičnih točk

Definicija 4.1. Naj bo $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ odvedljiv dinamični sistem. Točka $x_0 \in \mathbb{F}$ je *kritična točka*, če je

$$f'(x_0) = 0.$$

Za $f_c(x) = x^2 + c$ je $f'_c(x) = 2x$, zato je $x_0 = 0$ edina kritična točka.

Izrek 4.2. Naj bo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dinamični sistem s privlačno ali superprivlačno orbito. Tedaj ta orbita privlači vsaj eno kritično točko sistema f .

Natančneje: če je $A = (x_j)_j$ privlačna orbita, obstaja kritična točka y , za katero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(f^k(y), A) = 0 \quad \text{in} \quad \text{dist}(z, A) = \min_{x \in A} |z - x|.$$

Posledica 4.3. Kvadratni dinamični sistem f_c ima največ eno privlačno oziroma superprivlačno orbito.

Posledica 4.3 nam pove, da lahko privlačne orbite kvadratnega sistema opišemo z orbito njegove kritične točke. Ker ima f_c le eno kritično točko, to je 0, diagram kritične orbite zazna vse privlačne režime kvadratne družine.

Za parameter c je orbita kritične točke 0 enaka

$$0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto \dots.$$

Za realni parameter c lahko iz teh orbit narišemo bifurkacijski diagram.

4.1 Kako diagram nastane

Za vsak izbrani parameter c začnemo v kritični točki $x_0 = 0$ in računamo

$$x_{n+1} = x_n^2 + c.$$

Prvih nekaj iteracij zavržemo, saj opisujejo le prehod do dolgoročnega obnašanja. Preostale vrednosti x_n narišemo v navpičnem stolpcu nad pripadajočim parametrom c . Postopek ponovimo za gosto mrežo parametrov. To je standardna konstrukcija bifurkacijskega diagrama.

Navpično rezino diagrama pri fiksnem c beremo takole:

- ena vidna vrednost pomeni, da kritična orbita konvergira k privlačni fiksni točki;
- dve, štiri oziroma osem vrednosti pomenijo privlačni cikel periode 2, 4 oziroma 8;
- širok pas mnogih vrednosti kaže na aperiodično, občutljivo oziroma kaotično dolgoročno obnašanje;
- tudi znotraj kaotičnega območja se pojavijo ozka *periodična okna*, v katerih zopet obstaja privlačni cikel.

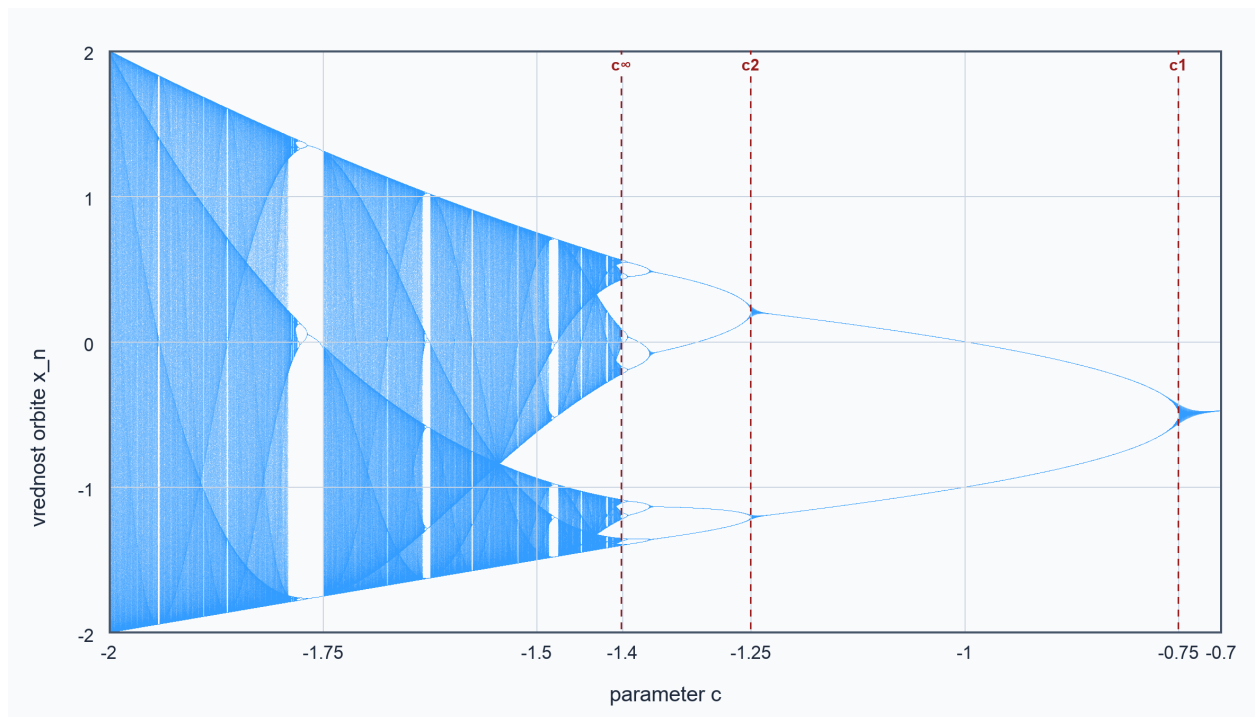


Fig. 7: Bifurkacijski diagram za $f_c(x) = x^2 + c$ na intervalu $-2 \leq c \leq -0,7$. Za vsakega od 4000 parametrov izvedemo 4000 iteracij kritične orbite, prvih 100 zavržemo, preostale pa narišemo. Črtkane navpičnice označujejo $c_1 = -3/4$, $c_2 = -5/4$ in akumulacijsko točko $c_\infty \approx -1,401155$.

4.2 Podvojitve periode

Pri $c_1 = -3/4$ privlačna fiksna točka izgubi privlačnost in nastane privlačni 2-cikel. Pri $c_2 = -5/4$ se njegova perioda ponovno podvoji in nastane privlačni 4-cikel. Nadaljnje podvojitve se vrstijo vedno hitreje:

$c_1 = -\frac{3}{4}$	prva podvojitve periode,
$c_2 = -\frac{5}{4}$	prehod iz 2-cikla v 4-cikel,
$c_3 \approx -1,36810$	prehod iz 4-cikla v 8-cikel,
$c_4 \approx -1,39405$	naslednja podvojitve periode,
$c_\infty \approx -1,401155$	Feigenbaumova točka oziroma meja kaskade.

Pri c_∞ se kaskada period $1, 2, 4, 8, \dots$ zgosti. Neposredno onkraj nje se pojavijo kaotični režimi, prekinjeni s periodičnimi okni.

5 Kompleksna dinamika

5.1 Napolnjena Juliajeva množica

Oglejmo si kvadratni kompleksni dinamični sistem

$$f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Za začetno točko $z_0 \in \mathbb{C}$ iteriramo sistem. Orbita je bodisi omejena bodisi divergira oziroma »eksplodira«.

Trditev 5.1 (Radij pobega). Orbita točke z_0 divergira, če

$$|z_0| > R_c := \max\{2, |c|\}.$$

Dokaz. Nastavimo

$$\lambda := |z_0| - 1 > 1.$$

Ker je $|z_0| > R_c$, velja tudi $|z_0| > |c|$. Iz obrnjene trikotniške neenakosti zato sledi

$$\begin{aligned} |z_1| &= |z_0^2 + c| \\ &\geq |z_0|^2 - |c| \\ &> |z_0|^2 - |z_0| = |z_0|(|z_0| - 1) = \lambda|z_0|. \end{aligned}$$

Posebej je $|z_1| > |z_0| > R_c$. Če je $|z_k| > |z_0|$, lahko enak razmislek uporabimo pri z_k in dobimo

$$\begin{aligned} |z_{k+1}| &\geq |z_k|^2 - |c| \\ &> |z_k|(|z_k| - 1) > \lambda|z_k|, \end{aligned}$$

saj je $|z_k| - 1 > |z_0| - 1 = \lambda$. Z indukcijo sledi

$$|z_n| > \lambda^n |z_0| \quad \text{za vsak } n \geq 1.$$

Ker je $\lambda > 1$, zaporedje $\lambda^n |z_0|$ divergira proti neskončnosti, zato tudi $|z_n| \rightarrow \infty$. S tem je divergenca orbite zares dokazana. $\square$

Če je $|z_0| \leq R_c$, orbita ni nujno omejena. Lahko šele po več iteracijah preseže R_c in nato pobegne.

Definicija 5.2 (Napolnjena Juliajeva množica). *Napolnjena Juliajeva množica* sistema f je

$$FJ(f) := \{z \in \mathbb{C} : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ je omejena orbita}\}.$$

Za kvadratni sistem velja $FJ(f_c) \subseteq \overline{B(0, R_c)}$.

5.1.1 Algoritem za risanje napolnjene Juliajeve množice

Napolnjeno Juliajevo množico numerično rišemo na naslednji način. Za izbrani parameter c izvedemo te korake.

1. V kompleksni ravnini izberemo pravokotno območje in ga razdelimo na mrežo pikslov. Vsak piksel predstavlja eno začetno točko z_0 .
2. Izberemo največje število iteracij N in za vsako začetno točko računamo $z_{n+1} = z_n^2 + c$, dokler orbita ne preseže radija pobega $R_c = \max\{2, |c|\}$ ali dokler ne izvedemo vseh N iteracij.
3. Če orbita prvič pobegne pri koraku n , piksel pobarvamo glede na čas pobega n : hitreje pobegle točke dobijo drugačno barvo oziroma odtenek kakor počasneje pobegle točke.
4. Če po N korakih pobega ne zaznamo, piksel pobarvamo črno in začetno točko obravnavamo kot približen element $FJ(f_c)$.

Ker izvedemo le končno mnogo iteracij, je dobljena slika približek. Večji N praviloma izboljša predvsem prikaz točk blizu roba množice.

Juliajeve množice bomo narisali pozneje, ko bomo definirali tudi pojem Mandelbrotove množice (glej podrazdelek 6.2.2).

5.2 Primer $f_0(z) = z^2$

Označimo

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}.$$

Če $z_0 \in \mathbb{D}$, je $|z_{n+1}| = |z_n|^2 < |z_n|$, zato $z_n \rightarrow 0$. Če $z_0 \notin \overline{\mathbb{D}}$, je $|z_0| > 1$ in orbita divergira. Če $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, potem $|z_n| = 1$ za vsak n . Sledi

$$FJ(z^2) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Poznamo tri tipe dinamike:

1. $z_0 \notin \overline{\mathbb{D}}$: orbita divergira v neskončnost;
2. $z_0 \in \mathbb{D}$: orbita konvergira k 0;
3. $z_0 \in \partial\mathbb{D}$: orbita ostane na krožnici in kaže občutljivo obnašanje.

5.2.1 Dinamika na robu krožnice

Za dinamiko na $\partial\mathbb{D}$ so ključne naslednje tri lastnosti.

1. Krožnica je invariantna: če je $|z_0| = 1$, potem je $|z_n| = 1$ za vsak n , zato orbita nikoli ne zapusti roba.
2. Vse odbojne periodične orbite funkcije z^2 ležijo na $\partial\mathbb{D}$, njihove točke pa so gosta podmnožica krožnice. Res, če ima točka periodo m , potem je

$$|(f_0^m)'(z)| = 2^m > 1,$$

zato je takšna periodična točka odbojna.

3. V vsaki okolici katerekoli točke roba sta točki z izjemno različnima dinamika: orbita ene konvergira k 0, orbita druge pa pobegne v neskončnost.

Natančneje, naj bo $x_0 \in \partial\mathbb{D}$ in naj bo U poljubna njegova okolica. Za dovolj majhen $\varepsilon > 0$ sta v U tudi točki

$$y_0 = (1 - \varepsilon)x_0 \in \mathbb{D}, \quad z_0 = (1 + \varepsilon)x_0 \notin \overline{\mathbb{D}}.$$

Njuni orbiti zadoščata

$$|f_0^n(y_0)| = (1 - \varepsilon)^{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{in} \quad |f_0^n(z_0)| = (1 + \varepsilon)^{2^n} \rightarrow \infty.$$

5.3 Juliajeva množica in kaos

Definicija 5.3. Naj bo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomski dinamični sistem,

$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Juliajeva množica je rob napolnjene Juliajeve množice:

$$J(f) := \partial FJ(f).$$

Pri $f_0(z) = z^2$ je $J(f_0) = \partial\mathbb{D}$, krožnica. V splošnem je Juliajeva množica mnogo bolj zapletena in pogosto fraktalna. Na njej ima dinamika kaotičen značaj.

Za polinom f stopnje vsaj 2 dinamika na $J(f)$ zadošča podobnim lastnostim kakor dinamika preslikave z^2 na $J(z^2) = \partial\mathbb{D}$. Dinamiki z začetnimi točkami na $J(f)$ zato pravimo *kaotična*.

Prvi praktični indikator kaosa dobimo iz analogije s točko 3 razdelka 5.2.1. Tudi na splošni Juliajevi množici je dinamika občutljiva na začetne pogoje. To pomeni, da lahko poljubno bližnji začetni točki po dovolj iteracijah razvijeta zelo različni orbiti. V praksi je takšna občutljivost eden izmed prvih indikatorjev, s katerimi preverjamo, ali je opazovana dinamika kaotična.

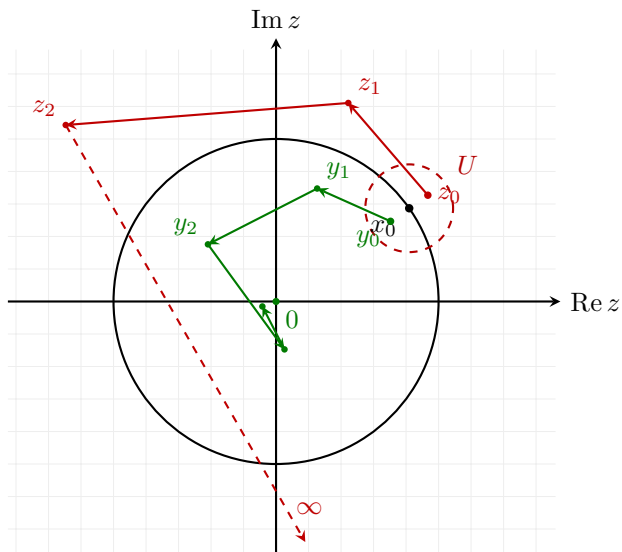


Fig. 8: V vsaki okolici U točke $x_0 \in \partial\mathbb{D}$ lahko izberemo $y_0 \in \mathbb{D}$ in $z_0 \notin \overline{\mathbb{D}}$. Zelena orbita konvergira k 0, rdeča pa pobegne v neskončnost.

5.4 Topološki opis s pomočjo kritične orbite

Izrek 5.4. Fiksirajmo $c \in \mathbb{C}$ in naj bo $f_c(z) = z^2 + c$.

1. Če je kritična orbita $(f_c^n(0))_n$ omejena, sta $J(f_c)$ in $FJ(f_c)$ povezani množici.
2. Če je kritična orbita neomejena, je $J(f_c)$ enaka Cantorjevi množici.¹

Cantorjevo množico konstruiramo tako, da iz intervala $[0, 1]$ odstranimo srednjo tretjino, nato srednji tretjini obeh preostalih intervalov in tako naprej:

$$C_0 = [0, 1], \quad C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

in v splošnem

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Cantorjeva množica je neprazna, popolnoma nepovezana in kompaktna.

6 Mandelbrotova množica

Mandelbrotova množica izraža temeljno odvisnost med Juliajevimi množicami in parametrom c .

Definicija 6.1. *Mandelbrotova množica* je

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : (f_c^n(0))_{n \geq 0} \text{ je omejena}\} = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ je povezana}\}.$$

Druge enakosti v definiciji je posledica izreka 5.4.

¹ Topološko natančneje množici nista nujno enaki, temveč sta homeomorfni.

6.1 Algoritem za risanje Mandelbrotove množice

Mandelbrotovo množico numerično rišemo na naslednji način.

1. V ravnini parametrov izberemo pravokotno območje in ga razdelimo na mrežo pikslov. Vsak piksel predstavlja eno vrednost parametra c .
2. Izberemo največje število iteracij N . Za vsak parameter c začnemo v kritični točki $z_0 = 0$ in računamo

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

dokler ne dobimo $|z_n| > 2$ ali dokler ne izvedemo vseh N iteracij.

3. Če orbita prvič preseže radij 2 pri koraku n , piksel pobarvamo glede na čas pobega n : hitro pobegle parametre prikažemo z drugačno barvo oziroma odtenkom kakor počasneje pobegle parametre.
4. Če po N iteracijah pobega ne zaznamo, piksel pobarvamo črno in parameter c obravnavamo kot približno točko množice $\mathcal{M}$.

Ker izvedemo le končno mnogo iteracij, je dobljena slika približek. Pomembna je tudi razlika med obema algoritmoma: pri risanju Juliajeve množice fiksiramo c in spreminjamo začetno točko z_0 , pri risanju Mandelbrotove množice pa spreminjamo parameter c in vedno začnemo v kritični točki $z_0 = 0$.

Iz algoritma je razvidno, da je $\mathcal{M} \subseteq \overline{B(0, 2)}$. Množica $\mathcal{M}$ je zaprta in zato kompaktna, poleg tega pa tudi povezana. Vsaki točki $c \in \mathcal{M}$ pripada povezana Juliajeva množica, medtem ko imajo parametri zunaj $\mathcal{M}$ nepovezane Juliajeve množice.

6.2 Vizualizacija Mandelbrotove množice

Pri običajni vizualizaciji notranjost Mandelbrotove množice pobarvamo črno. Točke zunaj nje pobarvamo glede na čas pobega kritične orbite: različni odtenki zato ne predstavljajo različnih delov množice $\mathcal{M}$, temveč hitrost, s katero pripadajoče orbite pobegnejo v neskončnost. Takšno barvanje posebej dobro poudari zapletenost roba.

6.2.1 Fraktalna struktura in majhne kopije

Mandelbrotova množica je fraktalna: ob povečevanju njenega roba se vedno znova pojavljajo nove podrobnosti. Med njimi so tudi majhne kopije celotne Mandelbrotove množice. Te kopije niso zgolj grafični učinek ločljivosti, saj se ob nadaljnjem povečevanju okoli njih ponovno pojavijo kardioda², krožne komponente in razvejene strukture roba.

Najprej si oglejmo celotno Mandelbrotovo množico na sliki 9. Zelena točka označuje realni parameter

$$c_* \approx -1,754877666,$$

v okolici katerega se nahaja prva manjša kopija množice. Rdeča točka označuje parameter

$$c_{**} \approx -0,171021 + 1,024347i,$$

v okolici katerega bomo opazovali drugo manjšo kopijo.

² Ime kardioda izhaja iz grških besed *kardía* (srce) in *eidos* (oblika), saj je krivulja srčaste oblike.

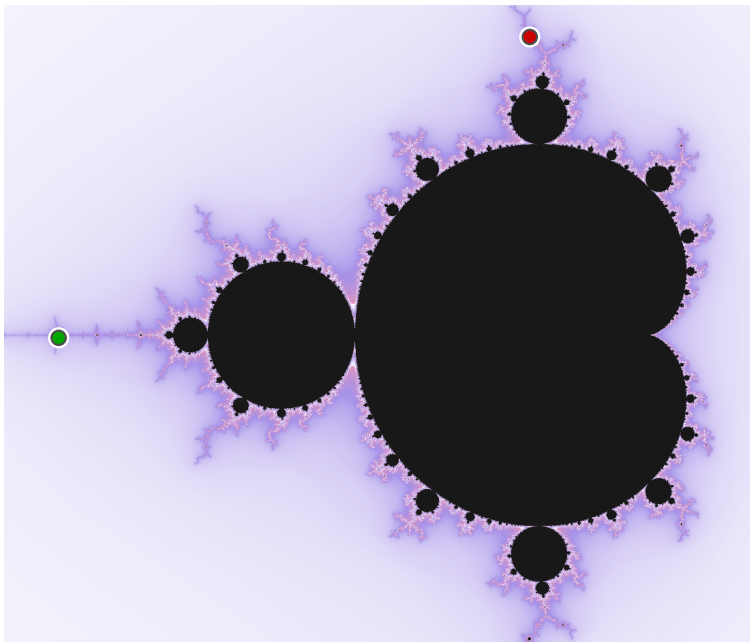


Fig. 9: Pregled celotne Mandelbrotove množice. Zelena točka označuje lokacijo prve povečave, rdeča pa lokacijo druge povečave.

Povečava označenega območja je prikazana na sliki 10. V njej prepoznamo isto osnovno obliko z glavno kardiodo in pripetimi komponentami, ob robu pa se pojavijo nove podrobnosti.

Drugi primer manjše kopije dobimo s povečevanjem okolice rdeče točke na sliki 9. Rezultat je prikazan na sliki 11. Ponovno se pojavi Mandelbrotovi množici podobna oblika, obdana z novimi, še drobnejšimi strukturami. Takšno ponavljanje na vedno manjših merilih je značilna lastnost fraktalne geometrije. Podobnost ni povsem geometrijsko natančna, saj vsako merilo prinese tudi drugače razporejene podrobnosti.

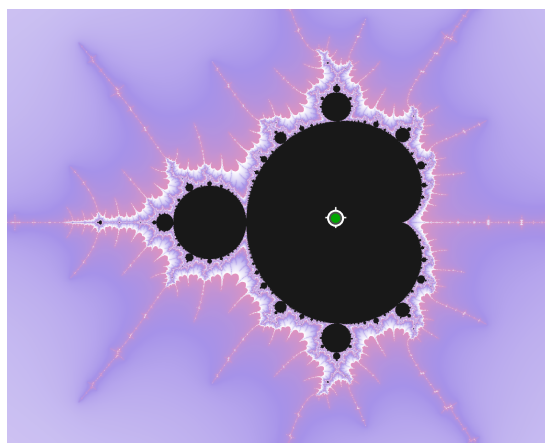


Fig. 10: Prva manjša kopija Mandelbrotove množice pri $c_* \approx -1,754877666$.

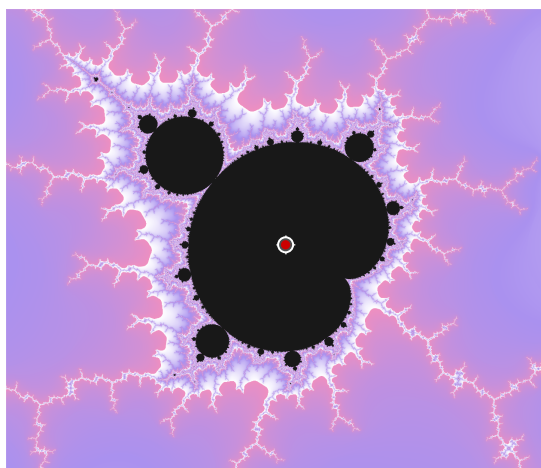


Fig. 11: Povečava okolice rdeče točke s slike 9, v kateri se pokaže nova manjša kopija Mandelbrotove množice.

6.2.2 Izbrani primeri Juliajevih množic

Vsak parameter $c \in \mathbb{C}$ določa svoj kvadratni dinamični sistem $f_c(z) = z^2 + c$ in s tem svojo Juliajevo množico. Na sliki 12 so na Mandelbrotovi množici označeni štiri parametri iz programa. Za lažje povezovanje ima vsak parameter svojo barvo. Z isto barvo je na sliki 13 pobarvana pripadajoča napolnjena Juliajeva množica. Juliajeva množica sama je rob pobarvanega območja.

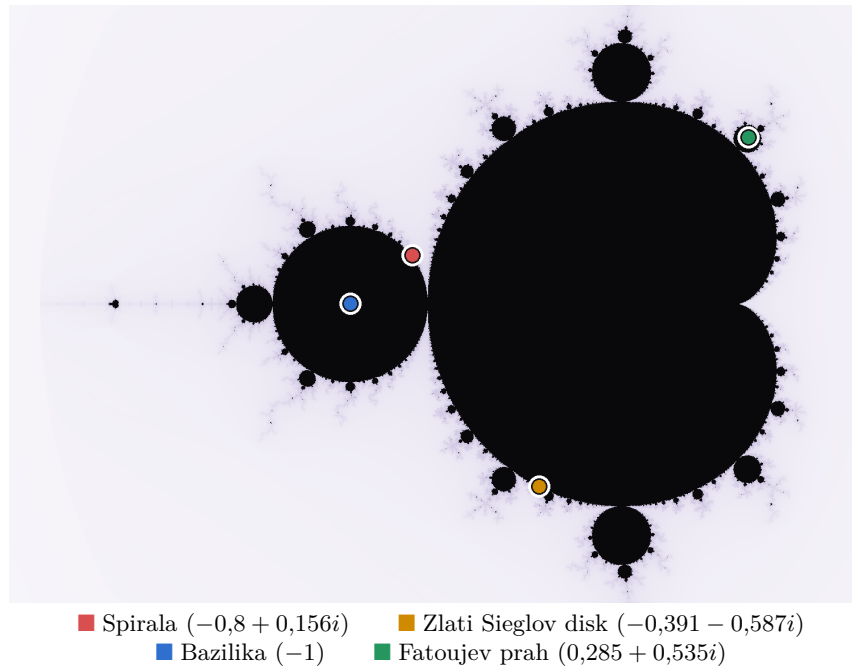
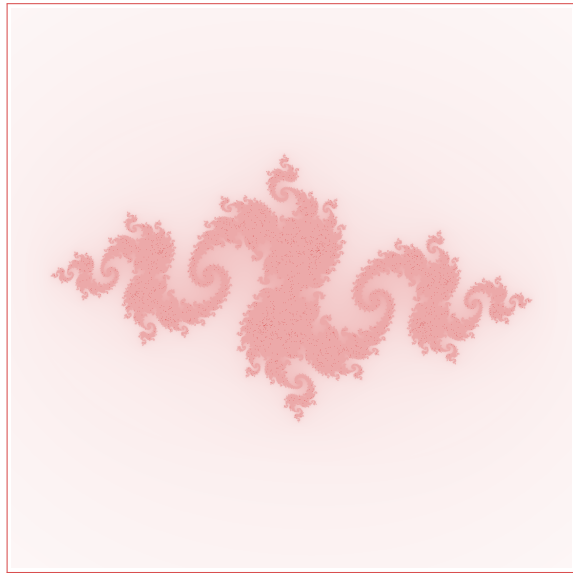
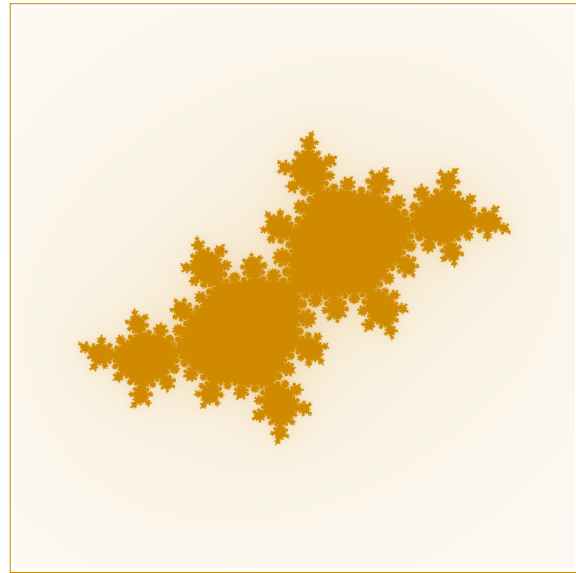


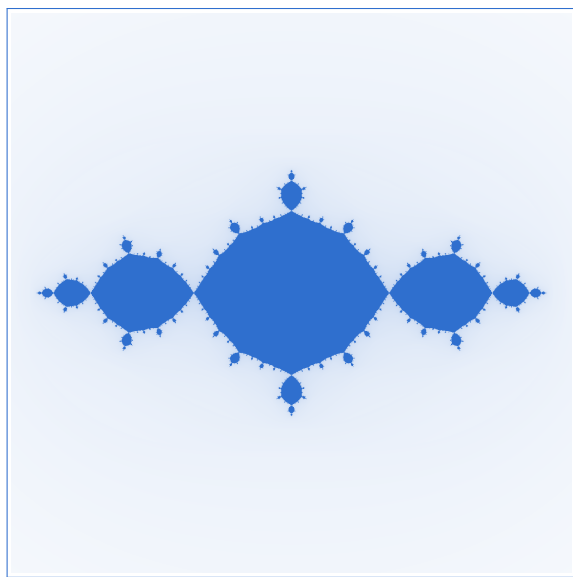
Fig. 12: Štiri izbrani parametri v ravnini Mandelbrotove množice. Barva posamezne točke se ujema z barvo pripadajoče Juliajeve množice na naslednji sliki.



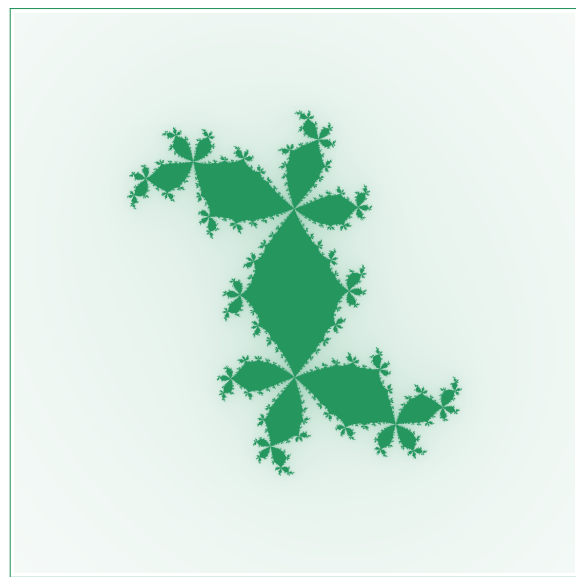
Spirala
 $c = -0,8 + 0,156i$



Zlati Sieglav disk
 $c \approx -0,391 - 0,587i$



Bazilika
 $c = -1$



Fatoujev prah
 $c = 0,285 + 0,535i$

Fig. 13: Štiri napolnjene Juliajeve množice. Barve ustrezajo označenim parametrom na sliki 12.

6.3 Komponente Mandelbrotove množice

Notranjost Mandelbrotove množice razpade na povezana območja, ki jim pravimo *hiperbolične komponente*. V vsaki taki komponenti ima sistem $f_c(z) = z^2 + c$ privlačen periodični cikel, njegova perioda pa je po vsej komponenti enaka. Zato lahko komponente pobarvamo glede na periodo njihovega privlačnega cikla, kakor je prikazano na sliki 14.

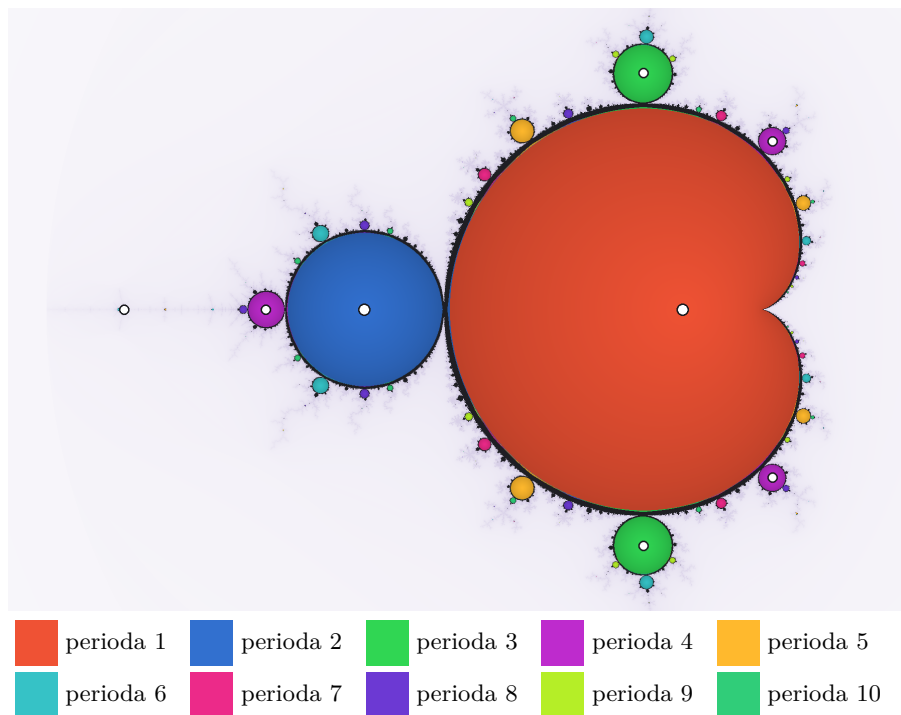


Fig. 14: Mandelbrotova množica s komponentami, pobarvanimi glede na periodo privlačnega cikla. Rdeča glavna kardioida ustreza periodi 1, modra komponenta periodi 2, zelene komponente periodi 3 in tako naprej. Bele točke s temnim robom označujejo izbrana superprivlačna središča komponent.

Rdeča glavna komponenta je kardioida. V njej so natanko tisti parametri, pri katerih ima f_c privlačno fiksno točko, torej privlačen cikel periode 1. Velika modra komponenta na levi vsebuje parametre s privlačnim 2-ciklom. Manjše zelene, vijolične, rumene in druge komponente ustrezajo višjim periodam. Črna oziroma nepobarvana območja na robu pomenijo, da pri uporabljeni ločljivosti in številu iteracij perioda ni bila zanesljivo prepoznana. Ta območja ne predstavljajo nove vrste dinamike.

Vsaka hiperbolična komponenta je konformno izomorfna odprtemu enotskemu disku $\mathbb{D}$, zato je zlasti topološko disk. To ne pomeni, da je njena podoba v ravnini parametra c nujno evklidski krog. Kot bomo dokazali v podrazdelku 6.3.1, je glavna komponenta natančna kardioida, komponenta periode 2 pa je natančen evklidski disk $B(-1, \frac{1}{4})$. Druge komponente so na sliki pogosto videti krožne ali kardioidne, vendar imajo lahko geometrijsko bolj zapletene meje. Vsaka ima enolično določeno središče.

6.3.1 Glavna kardioida in komponenta periode 2

Glavno kardioido sestavljajo parametri c , za katere ima f_c privlačno fiksno točko. Naj bo z taka točka. Rešujemo

$$z^2 + c = z, \quad |f'_c(z)| = |2z| < 1.$$

Pišemo množitelj kot

$$2z = re^{i2\pi t}, \quad 0 \leq r < 1, \quad t \in [0, 1),$$

zato je

$$z = \frac{1}{2}re^{i2\pi t}$$

in

$$c = z - z^2 = \frac{1}{2}re^{i2\pi t} \left(1 - \frac{1}{2}re^{i2\pi t}\right).$$

Ta parametrična enačba opisuje glavno kardioido.

Na glavno kardioido so pripete komponente višjih period. Za komponento periode 2 rešujemo

$$f_c^2(z) = z, \quad |(f_c^2)'(z)| < 1.$$

Simbolično dobimo krog s središčem v -1 in polmerom $1/4$:

$$c(t, r) = -1 + \frac{1}{4}re^{i2\pi t}, \quad 0 \leq r < 1, \quad t \in [0, 1).$$

6.3.2 Središča komponent in superprivlačni cikli

Središče hiperbolične komponente je natanko parameter, pri katerem privlačni cikel postane *superprivlačen*. Za kvadratni polinom je edina kritična točka 0. V središču komponente periode n je ta točka na periodičnem ciklu, zato velja

$$f_c^n(0) = 0.$$

Ta enačba nam omogoča poiskati središča komponent. Središče glavne kardioide je $c = 0$, središče modre komponente periode 2 pa je $c = -1$. Enako določimo tudi središča komponent višjih period. Bele točke na sliki 14 označujejo nekaj takih superprivlačnih središč.

Literatura

- [1] Mark McClure, *Complex Dynamics*, spletni učbenik in zapiski predmeta, pomlad 2019. Dostopno na: <https://legacy.marksmath.org/classes/Spring2019ComplexDynamics/text/contents.html> (dostopano 16. avgusta 2026).